

Begleittext

zur Vorlesung

Meßtechnik

an der Fachhochschule Furtwangen von

Robert Hönl

(Auflage 2)

Begleittext zur Vorlesung Meßtechnik

© Prof. Dr. Ing. Robert Hönl

Dieser Begleittext ist nur zur Verwendung in der Vorlesung Meßtechnik bestimmt. Das Anfertigen von Kopien, auch auszugsweise, bedarf der Zustimmung des Autors

1993: Auflage 0
1994: Auflage 1
2001: Auflage 2

Vorwort	3
1 Grundlagen	4
1.1 Was ist Messen und was ist Meßtechnik?	4
1.2 Normen	5
1.3 Größen und Einheiten	6
1.3.1 Internationales Einheitensystem, SI-Einheiten	6
1.3.2 Einheiten und Naturkonstanten	6
1.3.3 Normale	8
1.4 Grundbegriffe	9
1.4.1 Meßgerät, Meßeinrichtung, Meßkette, Meßanlage	9
1.4.2 Arten von Meßgeräten	10
1.4.3 Meßbereich	11
1.5 Meßfehler und Meßunsicherheit	11
1.5.1 Was sind Meßfehler?	11
1.5.2 Statisches Verhalten von Meßgeräten	13
1.5.3 Dynamisches Verhalten von Meßgeräten	17
1.5.4 Systematische Meßfehler	23
1.5.5 Zufällige Meßfehler	24
1.5.6 Fehlerfortpflanzung und Vertrauensbereich	26
1.6 Darstellung von Meßwerten	36
1.7 Ausgleichsrechnung	39
1.8 Korrelation	47
1.8.1 Kenngrößen stochastischer Signale	52
1.9 Meßprinzipien und Strukturen	59
1.9.1 Kettenstruktur	60
1.9.2 Parallelstruktur	60
1.9.3 Kreisstruktur	62
1.9.4 Selbstkalibrierende Verfahren	66
1.10 Literatur zu den Grundlagen [1]..[22]	68
2 Elektrische Meßtechnik	71
2.1 Wichtige elektrische Größen	71
2.1.1 Elektrische Spannung	71
2.1.2 Elektrischer Strom	72
2.1.3 Elektrische Ladung	72
2.1.4 Elektrische Leistung	73
2.1.5 Magnetischer Fluß und Flußdichte	73
2.1.6 Elektrischer Widerstand	74
2.1.7 Mit elektrischen Größen verknüpfte Größen	76
2.2 Messen primärer elektrischer Größen	76
2.2.1 Meßwerke	76
2.2.2 Gleichspannungs- und Gleichstrommessung	81
2.2.3 Wechselspannungs- und Wechselstrommessung	85
2.2.4 Leistungsmessung	94
2.2.5 Energieverbrauchsmessung	103
2.2.6 Widerstandsmessung	105
2.3 Messen elektrischer Größen mit Kompensationsverfahren	119
2.3.1 Kompensatoren	119
2.3.2 Meßschreiber	120
2.4 Messen elektrischer Größen mit elektronischen Mitteln	122
2.4.1 Meßverstärker, Operationsverstärker	122

2.4.2 Oszillatoren und Funktionsgeneratoren	142
2.4.3 Gleichrichter und Demodulatoren	150
2.4.4 Zähler	157
2.4.5 Analoge/digitale Wandlung	163
2.4.6 Oszilloskope	176
2.5 Literatur zur elektrischen Meßtechnik [23]..[47]	185
Stichwortverzeichnis	189

Vorwort

Mit der Meßtechnik wird heute nahezu jeder konfrontiert. Meßergebnisse sind in vielen Bereichen die Grundlage für weitere Entscheidungen. Auf Meßergebnisse fußen auch viele unserer Erkenntnisse. In der heutigen Zeit werden sehr viele Größen mittels elektrischer oder elektronischer Hilfsmittel gemessen, auch wenn die originären Größen, mithin die Meßgrößen, nicht von elektrischer Natur sind. Dies ist durch die starke Durchdringung unserer Welt mit elektronischen Anzeige- und Verarbeitungseinrichtungen zu erklären.

Für den Ingenieur bedeutet Messen letztendlich angewandte Physik. Das vorliegende Skript soll verstehen helfen, wie physikalische Effekte für Meßzwecke genutzt werden können und welche signifikanten Merkmale den Effekten anhaften. Aufgrund des umfangreichen Gebietes kann hier nur ein Teil abgehandelt werden. Ziel ist es, einen Überblick zu geben.

Das Vorlesungsmanuskript ist ein Begleittext zur Vorlesung an der Fachhochschule Furtwangen, Studiengang Mikrosystemtechnik. Es soll das Studium der Meßtechnik zu vertiefen helfen. Der Inhalt und Aufbau der Vorlesung kann durchaus vom Begleittext abweichen. Die Vorlesung ist in drei Hauptabschnitte unterteilt.

Der erste Abschnitt führt in die Begriffswelt der Meßtechnik und erläutert grundlegende Definitionen. Allgemeine Aspekte, insbesondere der Fehlerbetrachtung, werden erörtert. Die grundlegenden Strukturen werden diskutiert, die sich dann in den nachfolgenden Themen, bei der Behandlung der Meßverfahren, wiederfinden.

Der zweite Abschnitt behandelt elektrische Meßverfahren. Diesem Teil wird besondere Beachtung geschenkt, da elektrische Verfahren auch eine zentrale Bedeutung beim Messen von nichtelektrischen Größen einnehmen.

Der dritte Abschnitt - nicht im vorliegenden Begleittext enthalten - erläutert Verfahren für die nichtelektrische Meßtechnik. Hier werden besonders die physikalischen Effekte behandelt, die für funktionierende Meßverfahren eingesetzt werden.

Für das tiefere Studium existieren eine Reihe von Literaturquellen, die auch als Grundlage für dieses Skript dienen (s. Literaturverzeichnis zu den Grundlagen). Umfangreiche Sammlungen von Meßverfahren finden sich in [2], [3] und, in Lexikonform in [10]. Eine mehr verfahrenstechnische Orientierung weisen die Bücher [4] und [5] auf. Erschwinglicher, aber inhaltsähnlich und für Studierende geschrieben ist [11]. Eine mehr systemtheoretische Darstellung der Meßtechnik findet sich in [6], bzw. speziell zugeschnitten für die elektrische Meßtechnik in [9] und [18]. Die Meßwertverarbeitung, auch Signalverarbeitung, ist sehr gut in den Büchern [16] und [17] dargestellt. Speziell die elektrische Meßtechnik ist in [7] abgehandelt. Grundlegendes wird in [12], [13] und [14] behandelt. Eine gute Übersicht über Sensoren findet sich in [8].

1 Grundlagen

Lernziel: Grundlegende Gesichtspunkte der Meßtechnik. Welche wichtigen Meßprinzipien gibt es? Welche Fehler treten beim Messen auf? Auf welche Maße beziehen sich Meßwerte?

1.1 Was ist Messen und was ist Meßtechnik?

In der menschlichen Historie trat das Messen als Grundlage für das Handeln bereits sehr früh auf. Beim Tauschhandel ist es zwingend notwendig, Mengen zu vergleichen. Nicht alle Güter sind abzählbar, so daß nicht Quantisierbares, wie beispielsweise Flüssigkeiten, Holz, usw., mengenmäßig erfaßbar ist. So wurden schon bald Meßeinrichtungen für die Meßgrößen Länge, Masse und Volumen geschaffen.

Um Messungen miteinander vergleichen zu können, müssen die einzelnen Meßeinrichtungen aufeinander abgestimmt sein. Deshalb werden die Meßgrößen mit Referenzgrößen verglichen. Hieraus leitet sich die grundlegende Aussage ab, **messen heißt vergleichen!** Ein anschauliches Beispiel hierzu zeigt Bild 1. Dargestellt ist eine Waage, mit der die Masse des Wägegutes (linke Waagschale) durch den Vergleich mit den (Referenz-)Gewichtsstücken (rechte Waagschale) bestimmt werden soll. Beide Gewichte, d.h. das des Wägegutes (unbekannte Meßgröße) und das des bekannten Referenzgewichtes sind dann gleich, wenn die Waage ausbalanciert ist.

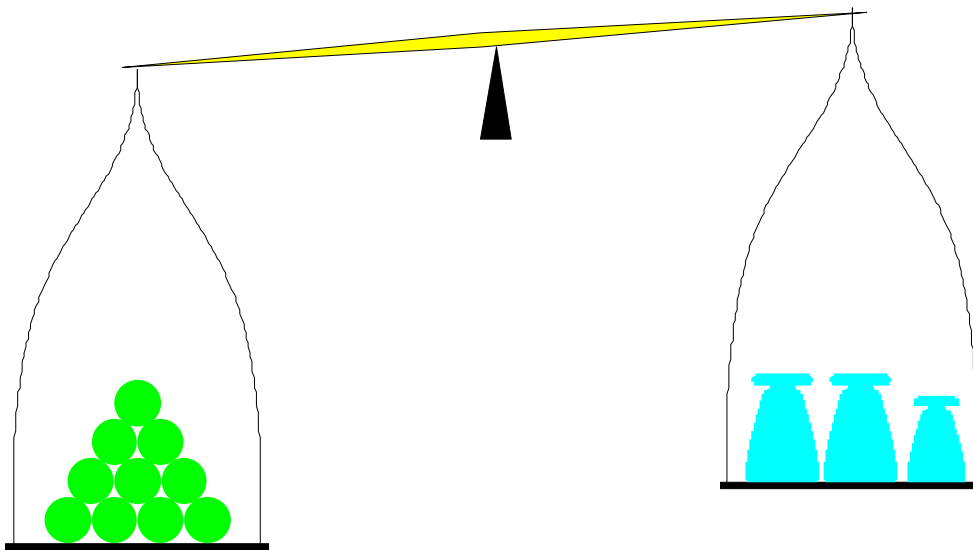


Bild 1: Messen heißt vergleichen! Anschaulich dargestellt anhand einer Wägung: links das Wägegut (Meßgröße), rechts die Vergleichsgewichte.

Mit der Einführung von Meßeinrichtungen geht auch die Definition von dazu passenden Einheiten einher. Diese bilden quasi quantifizierbare, d.h. abzählbare Einheiten, die dann, mit Faktoren versehen, den Meßwert darstellen. Mit zunehmendem Handel und immer weiter greifendem Austausch war es erforderlich, einheitliche Einheiten zu schaffen, die gleiche Messungen (=Vergleiche) an verschiedenen Orten und mit verschiedenen Meßgeräten erlauben. Die international üblichen Einheiten werden nachfolgend behandelt.

Wir wollen den Begriff des Messens noch weiter präzisieren [1], [10]:

Messen ist der experimentelle Vorgang, durch den ein spezieller Wert (Meßwert) einer physikalischen Größe (Meßgröße) als Vielfaches einer Einheit oder eines Bezugswertes (Referenzwertes) ermittelt wird. Der Meßwert wird als Produkt aus Zahlenwert und Einheit der Meßgröße angegeben:

$$\text{Meßwert} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \quad (1)$$

Beispiel: $l = 5,35\text{m}$. Die ggf. vorhandene Meßabweichung (auch Fehler genannt) ist die Differenz zwischen dem Meßwert und einem festgelegten Bezugswert. Das Meßergebnis erhält man i.allg. aus mehreren Meßwerten einer einzelnen Meßgröße oder aus Meßwerten verschiedener Meßgrößen mit Hilfe einer vorgegebenen eindeutigen Beziehung. Im einfachsten Fall kann ein einzelner Meßwert bereits das Meßergebnis darstellen. Für jedes Meßergebnis sind die physikalischen Bedingungen, unter denen es zustande kam, anzugeben, soweit sie von Einfluß sind. Zum Meßergebnis gehört die Angabe der Meßunsicherheit oder der Fehlergrenzen. Beispiel: Die Länge eines Stabes bei 20°C beträgt $l = 1,284\text{m} \pm 0,001\text{m}$. Mehr dazu in den nachfolgenden Kapiteln.

Anmerkung: Der Begriff Genauigkeit wird für die Beurteilung der Qualität des Meßwertes in der Praxis zwar benutzt, ist jedoch falsch. Denn Genauigkeit ist ein idealer Begriff. Ein genauer Wert kann keine Abweichungen aufweisen. Deshalb wird der Begriff Meßunsicherheit verwendet.

In diesem Zusammenhang stellt sich noch die Frage, wie "genau" (oder besser mit welcher maximalen Meßunsicherheit) gemessen werden muß? Dazu müssen wir beachten, daß eine kleinere Meßunsicherheit in der Regel mit einem höheren Aufwand verbunden ist. Deshalb ist die nötige Meßunsicherheit im Einzelfall abzuwägen - meist wird sie in der Praxis ohnehin durch die vorhandenen Meßmittel und -möglichkeiten vorgegeben. Die Frage kann allgemein damit beantwortet werden, daß nicht mit der kleinstmöglichen, sondern mit der nötigen Meßunsicherheit gemessen werden sollte.

1.2 Normen

Lernziel: Wie sieht die nationale und internationale Normensituation aus?

In Deutschland obliegen die Reglementierungen, d.h. Normen, beim Deutschen Institut für Normung in Berlin. In assoziierten Verbänden, z.B. dem VDE (=Verband deutscher Elektrotechniker), werden ebenfalls durch Fachleute aus Industrie, Wissenschaft und Forschung, sowie Behörden und natürlich den Verbänden selbst die Richtlinien und Normen erarbeitet. In Deutschland besitzen DIN-Normen Gesetzeskraft! Durch übergeordnete, internationale Organisationen, wie z.B. die ISO (International Standard Organisation) werden Normen international "harmonisiert", bzw. vereinheitlicht.

Für die Meßtechnik sind, aufgrund der langen Tradition, sehr viele Normen für die unterschiedlichsten Zweige bereits erstellt worden. In der DIN 1319 [1] sind die Grundlagen, Verfahren und Begriffe der Meßtechnik ausführlich definiert. Normen für spezielle Themen der Meßtechnik sind dem Normenverzeichnis, z.B. vom Beuth-Verlag, zu entnehmen.

1.3 Größen und Einheiten

Lernziel: Was sind Größen, was sind Einheiten? Welche Einheitensysteme gibt es? Welche Einheitensysteme werden heute in Technik, Wissenschaft und Wirtschaft verwendet?

1.3.1 Internationales Einheitensystem, SI-Einheiten

Wie bereits gezeigt wurde, sind Meßwerte stets mit Einheiten behaftet Gl.(1). Eine Einheit ist eine aus einer Menge miteinander vergleichbarer Größen ausgewählte und festgelegte Bezugsgröße [10]. Die erste internationale Festlegung fand 1875 für das Meter statt. Es entwickelten sich im Laufe der Zeit unterschiedliche Einheitensysteme, wie das CGS-System, basierend auf Centimeter, Gramm und Sekunde, oder das MKSA-System, basierend auf Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere. Charakteristisch ist, daß die Einheiten für Meßgrößen auf möglichst wenige Basisgrößen zurückgeführt werden. Die Einheiten der übrigen Meßgrößen hängen über physikalische Gesetze von diesen Basisgrößen ab und lassen sich hierüber als formale Verknüpfungen, wie z.B. Meter pro Sekunde als Einheit für die Geschwindigkeit, herleiten. Bei häufig verwendeten Einheiten, wie z.B. der Kraft mit der Einheit $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, wird eine neue Einheit definiert, hier im Beispiel N (=Newton), die aber nur auf die Basisgrößen aufsetzt.

International hat sich, insbesondere in Wissenschaft und Technik, das sogenannte SI (frz.: Système International d'Unités) durchgesetzt. In Deutschland ist die Verwendung der Einheiten durch die Ausführungsverordnung zum Gesetz über Einheiten im Meßwesen (AV, 1970, mit mehrfachen Novellierungen) geregelt. Neben den SI-Einheiten wurden noch eine Reihe weiterer Einheiten gesetzlich festgelegt. Im SI sind 7 Basisgrößen definiert.

1.3.2 Einheiten und Naturkonstanten

Nachfolgend die die festgelegten Einheiten aufgelistet [10]. Die Definition der Einheiten wird an entsprechender Stelle im Skript wiedergegeben.

SI-Basisgröße		SI-Basiseinheit	
Name	Zeichen	Name	Zeichen
Länge	l (kleines L)	das Meter	m
Masse	m	das Kilogramm	kg
Zeit	t	die Sekunde	s
el. Stromstärke	I (großes i)	das Ampere	A
thermodyn. Temperatur	T	das Kelvin	K
Stoffmenge	n	das Mol	mol
Lichtstärke	I_v	die Candela	cd

Tabelle 1: SI-Basisgrößen

Die SI-Basisgrößen (Tabelle 1) sind unabhängig von anderen Größen, i.d.R. durch physikalische Gesetzmäßigkeiten in Verbindung mit einer Vorschrift definiert. Von diesen Basisgrößen werden andere SI-Einheiten gebräuchlicher Meßgrößen abgeleitet (Tabelle 2). Diese setzen sich aus den Basisgrößen zusammen.

Abgeleitete Einheiten im SI	SI-Einheit		Beziehung zu	
	Name	Zeichen	SI-Basiseinheit	andere SI-Einheiten
Ebener Winkel	Radian	rad	= m ¹ m ⁻¹	
Raumwinkel	Steradian	sr	= m ² m ⁻²	
Frequenz	Hertz	Hz	= s ⁻¹	
Aktivität	Becquerel	Bq	= s ⁻¹	
Kraft	Newton	N	= m kg s ⁻²	
Druck/mech.Spannung	Pascal	Pa	= m ⁻¹ kg s ⁻²	= N/m ²
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	= m ² kg s ⁻²	= Nm
Leistung, Wärmestrom	Watt	W	= m ² kg s ⁻³	= J/s
Energiedosis	Gray	Gy	= m ² s ⁻²	= J/kg
Äquivalentdosis	Sievert	Sv	= m ² s ⁻²	= J/kg
Elektrische Ladung	Coulomb	C	= s A	
Elektrische Spannung	Volt	V	=m ² kg s ⁻³ A ⁻¹	= W/A
Elektrische Kapazität	Farad	F	= m ⁻² kg ⁻¹ s ⁴ A ²	= C/V
Elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	=m ² kg s ⁻³ A ⁻²	= V/A
Elektrischer Leitwert	Siemens	S	=m ⁻² kg ⁻¹ s ³ A ²	= A/V
Magnetischer Fluß	Weber	Wb	=m ² kg s ⁻² A ⁻¹	= Vs
Magnetische Flußdichte	Tesla	T	= kg s ⁻² A ⁻¹	= Wb/m ²
Induktivität	Henry	H	=m ² kg s ⁻² A ⁻²	= Wb/A
Celsius-Temperatur	Grad Celsius	°C	= 1K	
Lichtstrom	Lumen	lm	= m ² m ⁻² cd	= cd sr
Beleuchtungsstärke	Lux	lx	=m ² m ⁻⁴ cd	= lm/m ²

Tabelle 2: SI-Größen, abgeleitete Einheiten

Zur Anpassung der Einheiten an den Wertebereich der Meßgröße können die Einheiten selbst mit Faktoren als Vorsätze versehen werden, z.B. km=Kilometer für 1000m (Tabelle 3. Diese Vorsätze werden der Einheit unmittelbar vorangestellt. Im wissenschaftlichen Bereich wird in den Faktoren ein 1000er-Raster (10³-Stufung) bevorzugt. Die in Tabelle 3) *kursiv* gedruckten Vorsätze sind möglichst zu vermeiden, obwohl sie durchaus gebräuchlich sind, z.B. cm, hPa.

Hinweise: a) Wenn an ein mit einem SI-Vorsatz versehenes Einheitenzeichen ein Potenzexponent eingefügt ist, so gilt dieser Exponent auch für den Vorsatz: z.B. 1 cm³ = (10⁻² m)³ = 10⁻⁶ m³. b) Hintereinandersetzen mehrerer SI-Vorsätze ist unzulässig, z.B. nicht 1 mµm, sondern 1 nm.

Bedeutung	Vorsatz	Vorsatzzeichen	Faktor
Trillionenfache	Exa	E	10^{18}
Billiardenfache	Peta	P	10^{15}
Billionenfache	Tera	T	10^{12}
Milliardenfache	Giga	G	10^9
Millionenfache	Mega	M	10^6
Tausendfache	Kilo	k	10^3
<i>Hundertfache</i>	<i>Hekto</i>	<i>h</i>	10^2
<i>Zehnfache</i>	<i>Deka</i>	<i>da</i>	10^1
<i>Zehntel</i>	<i>Dezi</i>	<i>d</i>	10^{-1}
<i>Hundertstel</i>	<i>Centi</i>	<i>c</i>	10^{-2}
Tausendstel	Milli	m	10^{-3}
Millionstel	Mikro	μ	10^{-6}
Milliardenstel	Nano	n	10^{-9}
Billionstel	Piko	p	10^{-12}
Billiardenstel	Femto	f	10^{-15}
Trillionstel	Atto	a	10^{-18}

Tabelle 3: SI-Vorsätze für dezimale Vielfache oder Teile von Einheiten

Bei der Angabe von Meßwerten wird auch gelegentlich auf als konstant angesehene Bezugsgrößen zurückgegriffen. Beispiele: Beschleunigung $a=5g$; Ladung $=x e$, usw. In Tabelle 4 sind einige gängige Konstanten zusammengestellt.

1.3.3 Normale

Normale sind Referenzgrößen, auf die andere Meßgeräte abgeglichen werden können. Das besondere an Normalen ist, daß sie spezieller Überwachung durch die nationale Eichbehörde (in Deutschland der PTB=Physikalische Technische Bundesanstalt) unterliegen und auch zertifiziert werden.

Werden Meßgeräte (und Meßsysteme) durch die Eichbehörde auf Normale abgeglichen, gelten die Meßgeräte als geeicht (Eichung). Wird ein Meßgerät lediglich auf ein anderes als Referenz definiertes Meßgerät oder Normale abgeglichen, gilt es als kalibriert (Kalibrierung).

Name	Zeichen	Größe
Avogadro-Konstante	N_A	$6,022045 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Basis der natürlichen Logarithmen	e	2,72
Boltzmann-Konstante	k	$1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Elektronenladung	e	$1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Fallbeschleunigung (normale)	g_n (oder g)	$9,80665 \text{ m/s}^2$
Faraday-Konstante	F	$9,648456 \cdot 10^4 \text{ C mol}^{-1}$
Feldkonstante, elektrische	ϵ_0	$8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Feldkonstante, magnetische	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
Gaskonstante, universelle	R_0	$8,31441 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Gravitationskonstante	f	$6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Ludolfsche Zahl	π	3,14
Normdruck	p_n	101325 Pa
Normtemperatur	T_n	273,15 K
Planck-Strahlungskonstanten	c_1	$3,741832 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2$
	c_2	$1,438786 \cdot 10^{-2} \text{ K m}$
Planck-Wirkungsquantum	h	$6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	s	$5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Stoffmengen bezogenes Normvolumen des idealen Gases bei 273,15K und 101325Pa	V_0	$22,41383 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Wien-Verschiebungskonstante	A	$2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$

Tabelle 4: Häufig verwendete Konstanten

1.4 Grundbegriffe

Lernziel: Grundbegriffe der Meßtechnik im Sinne der Normung. Was sind Geräte, Systeme, Sensoren, Transmitter, Umformer und Wandler?

In der DIN 1319 Teile 1 .. 4 [1] sind die wichtigsten Grundbegriffe zusammengestellt. Einige aus [1] entnommene Begriffe sind nachfolgend erläutert.

1.4.1 Meßgerät, Meßeinrichtung, Meßkette, Meßanlage

Ein **Meßgerät** liefert oder verkörpert Meßwerte, auch die Verknüpfung mehrerer voneinander unabhängiger Meßwerte, wie beispielsweise das Verhältnis von Meßwerten.

Eine **Meßeinrichtung** besteht aus einem Meßgerät oder mehreren zusammenhängenden Meßgeräten mit zusätzlichen Einrichtungen, die ein Ganzes bilden. Zusätzliche Einrichtungen

sind vor allem Hilfsgeräte, die nicht unmittelbar zur Aufnahme, Umformung oder Ausgabe dienen (z.B. Hilfsenergie, Thermostat,..), sowie Signal- und Meßleitungen. Die wesentliche Aufgabe einer Meßeinrichtung ist die Aufnahme des Meßwertes einer physikalischen Größe (**Meßgröße**) oder eines **Meßsignals**, das den gesuchten **Meßwert** repräsentiert, die Weiterleitung und Umformung des Meßsignals und die Ausgabe des Meßwertes.

Das erste Glied in einer Meßeinrichtung, also das der Meßgröße am nächsten ist, wird häufig **Aufnehmer** genannt. Andere gängige Bezeichnungen sind **Sensor** oder **Fühler**. Es nimmt den Meßwert der Meßgröße auf und gibt ein diesem entsprechendes Meßsignal ab. Das letzte Glied einer Meßeinrichtung heißt **Ausgeber (Ausgabegerät)** und kann ein direkter Ausgeber (Sichtausgeber, z.B. ein Anzeigegerät oder ein Schreiber) oder ein indirekter Ausgeber (Magnetband, Diskette, ..) sein.

Die **Übertragungsglieder** jeder Art zwischen Aufnehmer und Ausgeber bilden die **Übertragungstrecke**. Dazu gehören Meßverstärker, Meßumformer und Meßumsetzer. Oft ist eine scharfe Trennung der Begriffe nicht möglich, jedoch fallen alle Glieder der Kette unter den Begriff Meßgerät.

Eine **Meßeinrichtung** wird als ein System (**Meßsystem**), das vor allem aus Aufnehmer, in 'Kette' geschalteten Übertragungsgliedern (Meßumformern) und Ausgeber zusammengesetzt ist, auch **Meßkette** genannt.

Eine **Meßanlage** umfaßt mehrere voneinander unabhängige Meßeinrichtungen, die in räumlichen oder funktionellem Zusammenhang stehen.

1.4.2 Arten von Meßgeräten

Meßgeräte mit direkter Ausgabe (Sichtausgeber) können in unterschiedliche Gruppen eingeteilt werden:

1.4.2.1 Anzeigendes Meßgerät

Die von ihm angebotene oder ausgegebene Information, der Meßwert, kann unmittelbar abgelesen oder abgenommen werden.

1.4.2.2 Registrierendes Meßgerät

Es zeichnet einzelne Meßwerte, oder den Verlauf, und zwar meist den zeitlichen Verlauf, von Meßwerten unmittelbar ablesbar auf. Beispiele: Schreiber, Drucker.

1.4.2.3 Zählendes Meßgerät

Gibt als Meßwert eine Anzahl aus oder die Summe von Quantisierungseinheiten (z.B. Wasserzähler mit Meßkammern). Oder es gehört zu den meist ebenfalls "Zähler" genannten, eine Meßgröße über die Zeit integrierenden Meßgeräten, wie beispielsweise der Elektrizitätszähler.

1.4.2.4 Meßgeräte mit Skalenanzeige

Eine Marke, wie ein Zeiger, ein Noniusstrich, eine Kante oder der Meniskus einer Flüssigkeitssäule, stellt sich meist kontinuierlich auf eine Stelle der Skale (Teilung) des Gerätes ein, oder die Skale wird darauf eingestellt. Die Anzeige erfolgt in der Regel kontinuierlich. Anmerkung: siehe Anmerkung 'Meßgeräte mit Ziffernanzeige'.

1.4.2.5 Meßgeräte mit Ziffernanzeige

Hier ist die Ausgangsgröße eine mit fest gegebenen kleinsten Schritt quantisierte zahlenmäßige Darstellung der Meßgröße. Der Meßwert erscheint diskontinuierlich als Summe von Quantisierungseinheiten oder als Summe (Anzahl) von Impulsen, z.B. eine Ziffernfolge. Solche Meßgeräte haben keine stetig ablesbare Skala.

Anmerkung: Die Benennungen "analog" und "digital" sollen für die Kennzeichnung von Meßverfahren vorbehalten bleiben [1] und deshalb nicht für die Kennzeichnung von Anzeigen verwendet werden. Eine Skalenanzeige soll nicht analoge Anzeige, eine Ziffernanzeige soll nicht digitale Anzeige genannt werden.

1.4.2.6 Maßverkörperungen

Dies sind Meßgeräte, die bestimmte, normalerweise unveränderliche einzelne Werte einer Meßgröße verkörpern. Beispiele: Endmaße, Gewichtsstücke.

1.4.2.7 Meßgeräte mit indirekter Ausgabe und übertragende Meßgeräte

sind Meßgeräte innerhalb einer Meßeinrichtung oder Meßkette, die nicht direkt anzeigen, wie beispielsweise **Meßverstärker**, **Meßumformer** oder **Meßumsetzer**. Sie bilden also den wesentlichen Teil der Übertragungstrecke und haben die Aufgabe, die Informationen über den Meßwert aus vorhandenen Meßsignalen in andere, geeignete Meßsignale umzuformen. Die Information über den Meßwert muß dabei eindeutig und unverfälscht erhalten bleiben.

Beispiele: Stromwandler, Spannungswandler, Meßumsetzer (AD/DA), Meßverstärker, Sensoren, sofern analoge Eingangssignale in eindeutige analoge Ausgangssignale umgesetzt werden.

1.4.3 Meßbereich

Der Meßbereich ist der Wertebereich der Meßwerte der Meßgröße, in welchem vorgegebene, vereinbarte oder garantierte Fehlergrenzen nicht überschritten werden (siehe Meßfehler und Meßunsicherheit).

1.5 Meßfehler und Meßunsicherheit

Lernziel: Linearitätsfehler, statisches Übertragungsverhalten, dynamisches Übertragungsverhalten, systematische und statistische Fehler, Fehlerfortpflanzung.

1.5.1 Was sind Meßfehler?

Eine Messung ist stets mit einem Energie- oder Informationsfluß vom Meßobjekt zum Meßgerät verbunden. Dabei ist streng darauf zu achten, daß umgekehrt durch den Anschluß oder den Einbau des Meßgerätes die zu messende Größe nicht verändert wird (Bild 2). Ist das Meßobjekt einmal durch das Meßgerät gestört, so kann nicht mehr der richtige, ohne das Meßgerät vorhandene Wert ermittelt werden.

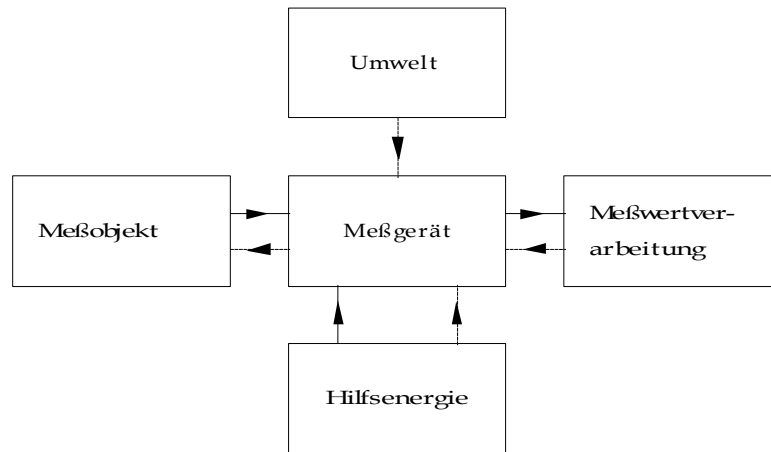


Bild 2: Wirkungen zwischen Meßeinrichtung, Meßobjekt und Umgebung

Ein Beispiel für eine solche 'Belastung' des Meßobjektes ist die Spannungsmessung mit einem niederohmigen Voltmeter. Dabei fließt ein Strom durch das Meßgerät, mithin wird Energie übertragen, und die eigentliche Meßspannung wird durch den i.allg. vorhandenen Quellwiderstand reduziert.

Eine solche Belastung der Meßgröße durch das Messen selbst wird Rückwirkung genannt. Diese ist, wenn sie bekannt ist, in einer Korrektur zu berücksichtigen. Aber selbst wenn rückwirkungsfrei gemessen wird, also ohne die Meßgröße durch den Meßvorgang zu beeinflussen, ist der Meßwert, das Ergebnis / die Anzeige, nicht völlig richtig. Der Unterschied zwischen dem gemessenen, angezeigten Wert x und dem wahren Wert x_w der Meßgröße wird als Fehler Δx bezeichnet:

$$\Delta x = x - x_w \tag{2}$$

Dieser Fehler, auch Meßfehler genannt, kann in verschiedene Arten klassifiziert werden. Nach Bild 3 erfolgt die Unterteilung nach Ursache und Behandlung. **Große Fehler** sind stets zu vermeiden, und gelten auch als vermeidbar. Sie treten bei korrekter Arbeitsweise und intakten Meßgeräten nicht auf. Von größerer Bedeutung sind die **systematischen Fehler** und die **zufälligen Fehler**. Sie werden in den folgenden Kapiteln näher erörtert.

Bei Meßgeräten wird eine Garantiefehlergrenze als technisches Merkmal angegeben. Sowohl systematische Fehler als auch zufällige Fehler sind in dieser Grenze enthalten. Die systematischen und zufälligen Fehler werden nur in Sonderfällen im einzelnen analysiert. Bei Routinemessungen wird häufig die Fehlerbetrachtung anhand der Garantiefehlergrenzen oder Klassengenauigkeit durchgeführt. Diese Angaben finden sich i.allg. auf dem Meßgerät und werden somit vom Hersteller spezifiziert. Er garantiert, daß die Fehler der mit dem Meßgerät unter festgelegten Bedingungen ermittelten Meßwerte innerhalb der angegebenen Grenzen liegen. Die **Garantiefehlergrenze** G gibt die mögliche äußerste Abweichung vom wahren Wert an. Sie bezeichnet die maximal mögliche Unsicherheit und wird oft auf den Meßbereichsendwert X bezogen:

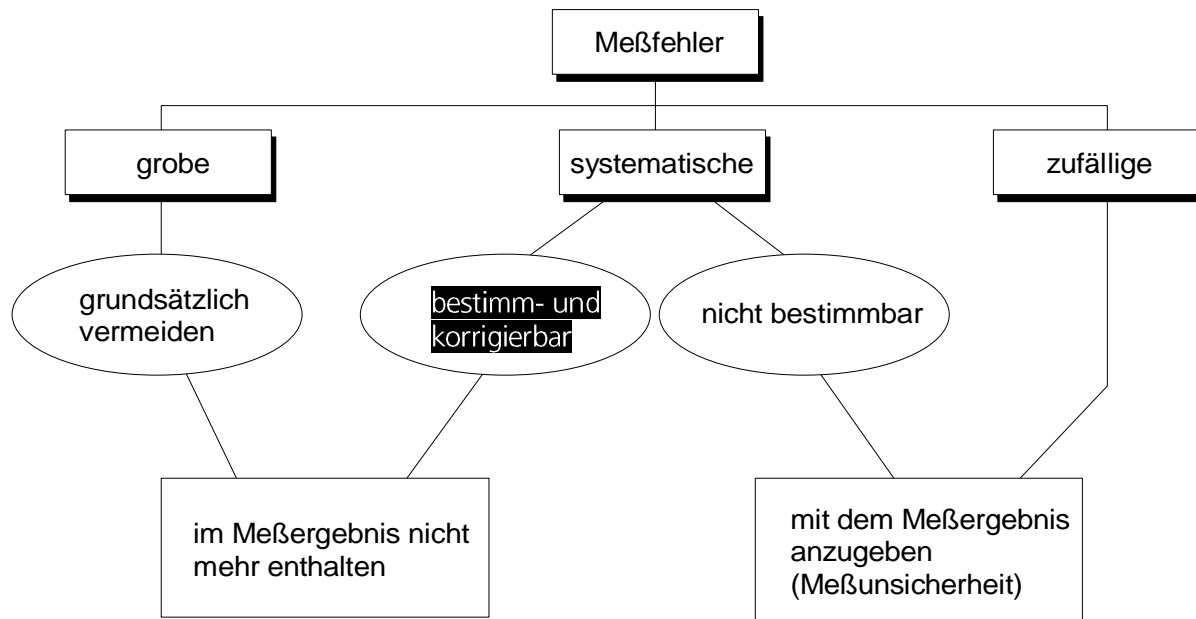


Bild 3: Gliederung der Meßfehler, klassifiziert nach Ursache und Behandlung [12]

$$G = \frac{\text{Unsicherheit } \Delta x}{\text{Meßbereichsendwert } X} = \frac{\Delta x}{X} \quad (3)$$

Beim Meßbereichsendwert ist zu berücksichtigen, daß sich dieser bei manchen Meßgeräten ändern kann, wenn beispielsweise der Meßbereich umgeschaltet wird.

Die Garantiefehlergrenze kann einseitig (Vorzeichen entweder + oder -) oder zweiseitig (\pm) angegeben werden. Im letzten Fall weicht der wahre Wert x_w höchstens um $\pm\Delta x$ vom gemessenen Wert x ab.

Aus Gl.(3) folgt

$$\Delta x = X G \quad \text{bezogen auf den angezeigten Wert } x: \frac{\Delta x}{x} = \frac{X}{x} G \quad (4)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die relative Unsicherheit des Meßwertes mit dem Verhältnis X/x zunimmt. Deshalb empfiehlt es sich, den Meßbereich jeweils möglichst gut auszunutzen.

Wie sich Fehler durch die Garantiefehlergrenzen in Rechenvorschriften fortpflanzen, wird in einem gesonderten Kapitel abgehandelt.

1.5.2 Statisches Verhalten von Meßgeräten

Der stationäre Zustand eines Meßgerätes ist bei zeitlicher Konstanz aller Eingangsgrößen nach Ablauf aller Ausgleichsvorgänge erreicht. Für diesen Zustand beschreibt die Kennlinie, wie das Ausgangssignal x_a eines Meßgerätes von dem Eingangssignal x_e abhängt:

$$x_a = f(x_e) \quad (5)$$

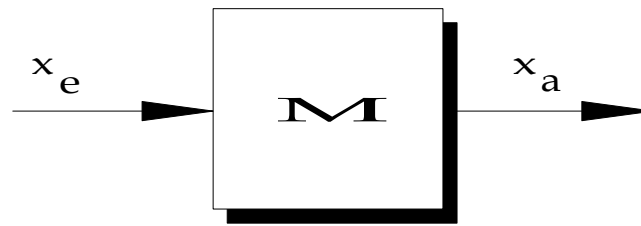


Bild 4: Meßgerät mit Eingangsgröße und Ausgangsgröße

Der Zusammenhang zwischen beiden Größen wird meistens in Form eines geschlossenen mathematischen Ausdrucks, oder seltener in Form einer Wertetabelle angegeben. Im Allgemeinen wird ein linearer Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, also zwischen Meß- und Anzeigegröße gewünscht. Bild 4 zeigt ein typisches Ein-/Ausgangssystem als Blockschaltbild eines Meßgerätes M, mit der Meßgröße x_e und der Anzeigegröße x_a . Wird der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße graphisch dargestellt, dann erhält man die sog. Kennlinie des Meßgerätes. Bild 5 zeigt zwei unterschiedliche Kennlinien. Die Kennlinie links ist nicht linear, d.h. die mathematische Linearitätsbeziehung zwischen der Meßgröße und dem Anzeigewert ist nicht anwendbar. Bei linearen Beziehungen liegen die Zuordnungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen auf Geraden (Bild 5 rechts). Die Steigung dieser Geraden entsprechen der Empfindlichkeit des Meßgerätes. Wird der Empfindlichkeitsbegriff verallgemeinert, dann läßt sich die Empfindlichkeit als Änderung des Anzeigewertes bezogen auf die Änderung der Meßgröße angeben (siehe Bild 5 links), mithin also durch eine Tangente:

$$E = \frac{dx_a}{dx_e} \tag{6}$$

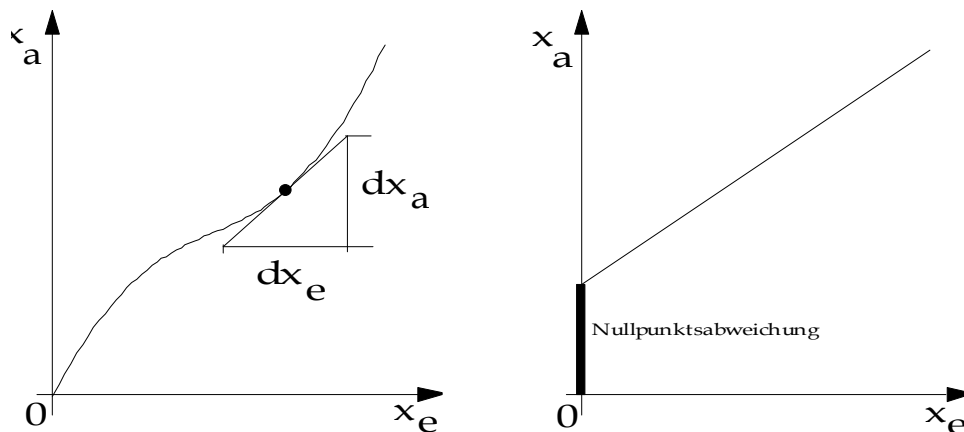


Bild 5: Kennlinienbeispiele: links eine nichtlineare Kennlinie, rechts eine Kennlinie mit unterdrücktem Nullpunkt.

Bei nichtlinearen Kennlinien hängt, wie aus Bild 5 - links leicht erkennbar, die Empfindlichkeit vom Arbeitspunkt ab. Da Kennlinien reproduzierbar sind, kann durch nachgeschaltete Korrekturglieder oder rechnerisch der Linearitätsfehler in Grenzen ausgeglichen werden. Wird in einem **Arbeitspunkt** die Tangente an die Kennlinie gelegt und dabei dem Meßgerät eine Empfindlichkeit (Gl.(6)) zugeordnet, dann wird dies die **Linearisierung** um den Arbeitspunkt genannt (Anmerkung: mathematisch entspricht die Linearisierung einer

Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung der Kennlinie im Arbeitspunkt). Verschiebt sich der Arbeitspunkt, dann kann sich eine völlig andere Kennlinie ergeben. Bei vielen Meßgeräten werden **kompensierende Verfahren** eingesetzt (siehe dort, Bild 36), wo der Arbeitspunkt durch einen Regelkreis eingestellt wird.

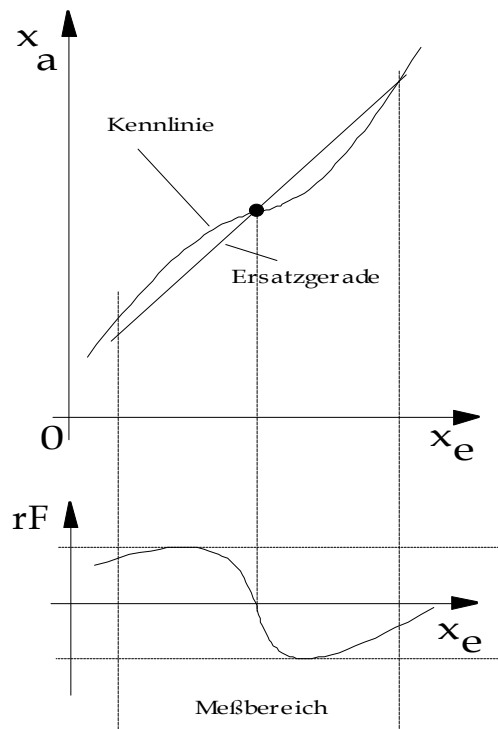


Bild 6: Linearisierung einer Kennlinie über einen Meßbereich (oben) mit der graphischen Darstellung des Linearitätsfehlers

Die **Linearisierung** kann auch über den gesamten Meßbereich erfolgen (Bild 6 oben). Die Steigung der Ersatzgeraden, welche die Empfindlichkeit des Meßgerätes repräsentiert, wird dann i.allg. nicht durch eine Taylorreihenentwicklung ermittelt, da ja kein konkreter Arbeitspunkt mehr vorliegt und die Abweichungen dann zu groß werden würden. Hier werden die Geradenparameter, Steigung a und Verschiebung b , durch andere Methoden (siehe weiter unten) ermittelt. Bei der linearisierten Kennlinie kann zwischen realer Kennlinie und der Ersatzgeraden, mit der Empfindlichkeit als Steigung, eine **Fehlerkurve** ermittelt werden (Bild 6 unten). Es ergibt sich dann ein Fehler f zwischen dem angezeigten Meßwert x_a und dem theoretischen, aus der Geraden ermittelten Meßwert \hat{x}_a :

$$\begin{aligned}
 f &= x_a - \hat{x}_a \\
 f &= x_a - (ax_e + b)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Derartige Abweichungen sind stets reproduzierbar und werden mitunter als Korrekturkennlinie angegeben. Die Angaben erfolgen meist in Prozent bezogen auf den Meßbereich oder Meßbereichsendwert als **relative Fehler** rF (Bild 6 unten). Die Breite der Fehlerkurve (maximaler Wert - minimaler Wert) wird als **Linearitätsfehler** bezeichnet. Die Wahl der Ersatzgeraden kann auf unterschiedliche Art erfolgen. Die erste, mehr experimentelle Art, zielt auf eine Minimierung des Linearitätsfehlers, d.h. der Maximal- und Minimalwerte. Die zweite, mathematisch fundiertere Art ist die **Methode der kleinsten Fehlerquadrate**. Hierbei wird die Fehlerkurve, ggf. nur in Stützpunkten, quadriert und danach werden die Geradenparameter a und b so bestimmt, daß die Summe der Quadrate,

im infinitesimalen Sinne die Summenfläche unter der Quadratkurve ein Minimum wird (vgl. auch "Ausgleichsrechnung"):

$$S(a, b) = \int_{\text{Meßbereich}} f^2(x_a(x_e), x_e) dx = \text{Minimum} \quad (8)$$

Ist die Kennlinie eine Gerade oder eine linearisierte Kennlinie (Bild 5 rechts), dann hat das Meßgerät in allen Arbeitspunkten dieselbe konstante Empfindlichkeit $E=k$. Verläuft die Kennlinie zusätzlich durch den Nullpunkt, liegt eine reine Proportionalität $x_a=kx_e$ vor.

Bei vielen Meßgeräten, insbesondere solche mit hoher Empfindlichkeit, kann es nützlich sein, den Nullpunkt zu unterdrücken. Das bedeutet, bei einer Meßgröße vom Wert 0 wird bereits ein Wert ungleich 0 angezeigt (Bild 5 rechts: Nullpunktsabweichung). Nimmt die Meßgröße Werte in einem relevanten Bereich an, dann kann der Anzeigewert klein bleiben. Änderungen der Meßgröße ergeben dann signifikante Änderungen in der Anzeigegröße.

Andere Gründe für eine Nullpunktsabweichung können z.B. die Energieversorgung des Meßgerätes über Signalleitungen oder eine Bereitschaftsanzeige sein. Ein typisches Meßgerät der ersten Kategorie ist eines mit 4..20mA-Schnittstelle (vorzugsweise Sensoren). Der Anzeigewert ist der Strom, der durch das Meßgerät getrieben werden kann. Dieser ist immer größer oder gleich 4mA, um die Energieversorgung des Meßgerätes aufrecht zu erhalten.

Weitere Abweichungen von einer idealen Kennlinie, z.B. einer Geraden, können sich durch sog. Hystereseeffekte einstellen. Der bekannteste Hystereseeffekt ist die Magnetisierung (Induktion B) in einem magnetischen Material, das einer magnetischen Feldstärke H ausgesetzt ist. Nach entferntem Feld verbleibt ein Restmagnetismus B_0 , die Remanenz, erhalten. Dieser Hystereseeffekt wird besonders bei Dauermagneten genutzt, denn dies entspricht dort dem gewünschten Verhalten, ohne äußeres magnetisches Feld eine magnetischen Fluß zu erzeugen. Wird die magnetische Feldstärke vom kleinstmöglichen zum größtmöglichen Wert und anschließend zurück verändert, dann ergibt sich für die Induktion B ein schleifenförmiger Verlauf (Hystereseschleife). Die von der Hystereseschleife umschlungene Fläche ist umso größer, je weiter die Feldstärke verändert wurde (materialunabhängig) und je ausgeprägter die Remanenz des magnetischen Werkstoffes (materialabhängig) ist.

Bei Meßgeräten und Sensoren ist dieser Effekt natürlich nicht erwünscht, stellt sich aber oft ein. Insbesondere dann, wenn magnetische Systeme Bestandteil des Meßwertaufnehmers sind. Beispielsweise finden sich **Hystereseeffekte** bei Kraftkompensationsaufnehmern mittels elektrodynamischer Kompensationsglieder (siehe Kraftaufnehmer). Aber auch andere physikalische Effekte können Hystereseeffekte, oder Effekte ähnlicher Wirkung, verursachen (Reibung, Verformungen, usw.).

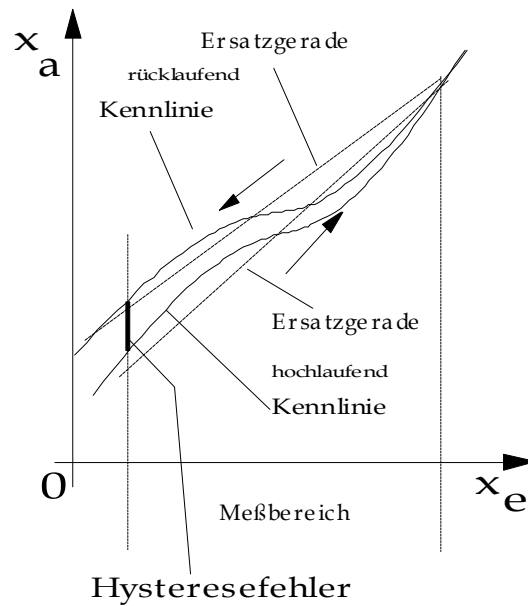


Bild 7: Hysterese in einer Kennlinie

Bild 7 zeigt den Verlauf einer nichtlinearen Kennlinie, und der dazugehörigen linearisierten Kennlinie (Ersatzgeraden), für zunehmende Werte der Meßgröße, beginnend am unteren Ende des Meßbereichs, 'durchlaufend' bis zum oberen Ende des Meßbereichs und wieder zurück. Für die hochlaufende und die rücklaufende Kennlinien und der dazugehörigen Ersatzgeraden ergeben sich unterschiedliche Empfindlichkeiten und unterschiedliche Nullpunkte. Dieser **Hysteresefehler** ist den anderen Fehlern überlagert und mindert die Qualität des Meßaufnehmers.

Gelegentlich wird für diesen Sachverhalt auch zur Beurteilung die Umkehrspanne [1]-Teil 2 benutzt. Dabei wird bei einem Wert der Meßgröße (Eingangsgröße x_e) die Größe

$$\text{rel. Umkehrspanne} = \frac{x'_a - x_a}{x_a} \tag{9}$$

gebildet, wobei x'_a der Anzeigewert ist, der sich bei abnehmender Meßgröße, und x_a der Anzeigewert ist, der sich bei zunehmender Meßgröße auf den Wert x_e einstellt. In der Regel muß für die Ermittlung der Umkehrspanne der gesamte Meßbereich überstrichen werden.

1.5.3 Dynamisches Verhalten von Meßgeräten

Bisher wurde nur die statische Kennlinie eines Meßgerätes betrachtet. Meßgeräte sind aber nicht in der Lage in beliebig kurzer Zeit auf eine Änderung der Eingangsgröße mit einem der Kennlinie entsprechendem Anzeigewert zu reagieren. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist das klassische Zeigerinstrument, wie es als Voltmeter vorkommt. Durch die Induktivität der Meßspule und die mechanische Trägheit des Zeigersystems benötigt das Instrument eine gewisse Zeit, um sich auf den Endwert einzustellen. Ist die Meßgröße konstant, muß sich auch ein konstanter Anzeigewert, der sog. **stationäre Endwert** (entsprechend der statischen Empfindlichkeit) ergeben. Wenn sich die Meßgröße zeitlich verändert, kann es zu erheblichen Abweichungen, d.h. in diesem Fall **dynamischen Meßfehlern** kommen. Beispielsweise neigen viele Meßgeräte und Sensoren bei schnellen Veränderungen der Meßgröße, so auch die bereits erwähnten Zeigerinstrumente, zur Mittelwertbildung.

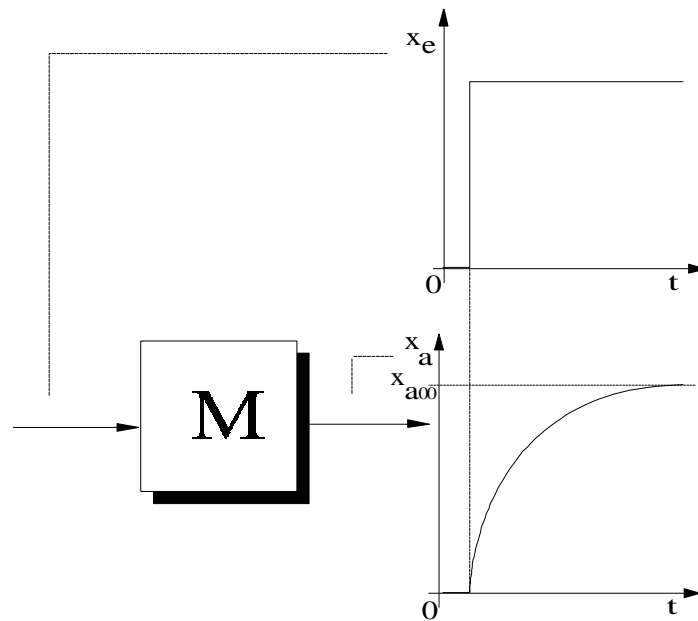


Bild 8: Zeitlicher Verlauf der Anzeige bei sprunghafter Änderung der Meßgröße

Ursachen für diese "endliche Meßgeschwindigkeit" sind in der Regel bewegte Massen, Energiespeicher, wie Kondensatoren oder Induktivitäten, aber auch Druckbehälter, Reibungs- und Dämpfungswiderstände, etc.. Jedes Meßgerät kann daher als **dynamisches Systemmodell** mittels **Differentialgleichungen** beschrieben werden. Gängige Beurteilungen der "**Meßgeschwindigkeit**" erfolgen entweder durch die **Sprungantwort**, die **Impulsantwort**, die **Rampenantwort** oder durch die **Sinusantwort**. Diese Beschreibungs- und Testformen werden in der **Regelungstechnik** eingehend behandelt.

Bei der **Sprungantwort** wird die Meßgröße sprunghaft auf einen im weiteren Verlauf konstanten Testwert auf das Meßgerät gegeben. Dabei wird der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße beobachtet (Bild 8). Das sich ergebende Verhalten des Meßgerätes wird als Sprungantwort bezeichnet. Wichtig ist jedoch, daß die Sprungantwort, wie fast alle Beschreibungen von dynamischen Eigenschaften, in erster Linie nur für **lineare Systeme** anwendbar ist. Bei nichtlinearen Systemen, also Meßgeräten mit nichtlinearer Kennlinie (siehe vorhergehenden Abschnitt), kann die Sprungantwort nur verzerrt und damit unvollkommen ermittelt werden. Je nach Meßsystem ergeben sich prinzipiell unterschiedliche Verläufe der Ausgangsgröße (Anzeigewert).

Im wesentlichen können 4 Grundtypen und teilweise Mischungen daraus beobachtet werden (willkürliche Festlegung). Bild 9-a zeigt nochmals die sprunghafte Eingangsgröße. Bild 9-b zeigt die Sprungantwort eines Systems 1. Ordnung, d.h. es wird mit einer Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben. Charakteristisch für ein solches System sind das exponentielle Annähern der Anzeige ohne Wendepunkt an den Endwert und der steile Anstieg aus der Ruhelage (Nullpunkt). Die Zeitkonstante T_1 ist der Parameter der Exponentialkurve. Nach der Zeit $t=T_1$ erreicht die Kurve ca. 63% ihres Endwertes, nach $t=3T_1$ ca. 95% und nach $5T_1$ ca. 99%. Ein solches Verhalten findet sich beispielsweise bei Meßverstärkern und ist auch sehr beliebt als vereinfachte Beschreibung von komplexen Systemen.

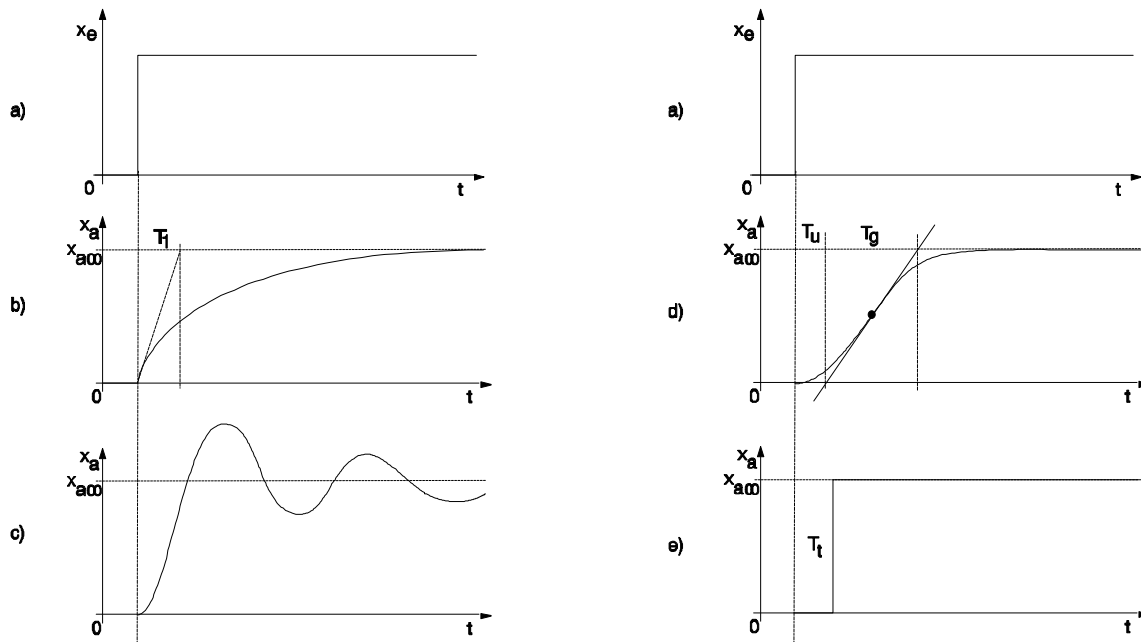


Bild 9: a) Eingangsgröße als idealer Sprung; b) Sprungantwort eines Systems 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T_1 ; c) Sprungantwort eines Systems 2. Ordnung mit Schwingverhalten; d) Sprungantwort eines Systems 2. Ordnung ohne Schwingverhalten mit den Parametern T_u und T_g (Erläuterungen siehe Text); e) Sprungantwort eines Systems mit Totzeit T_t

Bild 9-c zeigt ein Meßsystem höherer Ordnung mit **Schwingneigung**. Diese finden sich beispielsweise in schwachgedämpften Feder-Massesystemen oder Systemen mit elektrischen Schwingkreisen wieder. Da letztendlich der stationäre Endwert als Meßwert von Interesse ist, stört die Schwingneigung. Abhilfe schafft hier eine gezielte künstliche Dämpfung (siehe z.B. Waagen, Drehspulmeßwerke,..) oder ein aktives **Kompensationssystem**.

Bild 9-d zeigt ebenfalls ein System höherer Ordnung, aber ohne Schwingneigung. Ein solches Verhalten stellt sich bei stark gedämpften, schwingungsfähigen Systemen oder bei einer Kette von Systemen 1. Ordnung (von sich aus nicht schwingungsfähig) ein. Charakteristisch ist, speziell hier bei einem System 2. Ordnung, der 'flache Start' der Sprungantwort, d.h. Steigung 0 und ein Wendepunkt im Anstieg.

Bild 9-e zeigt ein Verhalten mit **Totzeit**. D.h. die Meßgröße selbst wird unverändert übertragen, aber mit einer festen Zeitverzögerung, der Totzeit T_t , angezeigt. Meßvorgänge mit reinem Totzeitverhalten kommen in Meßgeräten selten vor. Häufiger finden sie sich in regelungs- oder steuerungstechnischen Anlagen und Systemen. Ein klassisches Beispiel ist ein Förderprozeß (Förderband), bei dem nicht an der erwünschten, sondern nur an einer förderstromabwärts gelegenen Stelle gemessen werden kann (Temperatur, Beladung, ..). Der Meßwert an der gewünschten Stelle steht dann erst nach einer Verzögerungszeit zur Verfügung. In der Praxis wird das Totzeitverhalten aber zur Beschreibung von Systemen höherer Ordnung vereinfachend eingesetzt.

Zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens wird normalerweise nicht der ganze Verlauf der Sprungantwort, sondern nur einzelne, signifikante Kennwerte angegeben. Beispielsweise bei

Systemen 1.Ordnung die **Zeitkonstante** T_1 , oder bei Systemen 2. Ordnung die **Verzugszeit** T_u und die **Ausgleichszeit** T_g , oder die **Totzeit** T_t .

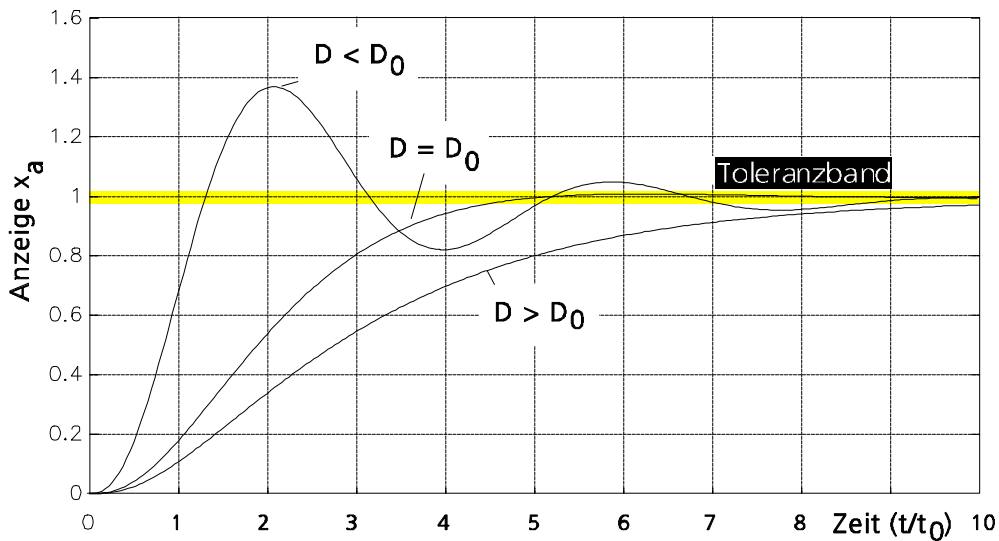


Bild 10: Einschwingverhalten eines Systems 2. Ordnung bei verschiedenen Dämpfungsmaßen

Ein **ideales dynamisches Verhalten** von Meßgeräten wäre ein verzögerungs- und totzeitfreies Einschwingen. Aus teilweise erwähnten Gründen ist dies jedoch nicht realisierbar. Bei **trägheitsbehafteten Systemen**, wie auch bei Meßgeräten, liegt in der Regel ein dynamisches System höherer Ordnung vor und es stellen sich Sprungantworten gemäß Bild 9c oder Bild 9d ein. Ein **optimales dynamisches Verhalten** unter meßtechnischen Gesichtspunkten liegt dann vor, wenn der Anzeigewert dem endgültigen Wert (t gegen unendlich) 'ausreichend nahe' ist. Als ausreichend nahe kann ein **Toleranzband** (Bild 10) angesehen werden, dessen Breite anwendungsspezifisch definiert werden muß. Dies kann beispielsweise aus den Fehlern (Linearitäts- oder Hysteresefehler) oder aus der geforderten **Toleranzbreite** abgeleitet werden. Ein Meßsystem mit 'optimalem Einschwingen in den Endwert' liegt dann vor, wenn die Sprungantwort am schnellsten endgültig innerhalb des Toleranzbandes liegt. Bild 10 zeigt Sprungantworten unterschiedlich gedämpfter Systeme zweiter Ordnung, die sich mit der Differentialgleichung

$$\frac{T_0^2}{4\pi} \ddot{x}_a(t) + \frac{DT_0}{\pi} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = Exe(t) \tag{10}$$

beschreiben lassen. Wäre das Dämpfungsmaß $D=0$, dann ergäbe sich als Sprungantwort eine ungedämpfte Schwingung der Periodenlänge T_0 . Der optimale **Dämpfungswert** ist mit D_0 bezeichnet und liegt z.B. bei Systemen 2. Ordnung im Bereich von $D_0=0,7$ (kürzeste Einschwingzeit, aber mit leichtem Überschwingen) bis $D=1$ (**aperiodischer Grenzfall**, d.h. kein Überschwingen). Bild 11 zeigt die Abhängigkeit der Einstellzeit von der Dämpfung D bei einem System 2. Ordnung, d.h. die erforderliche Zeit, eben die Einstellzeit, bis das Anzeigesignal endgültig in das festgelegte Toleranzband "eingelaufen" ist. Die treppenartigen Verläufe kommen von dem sinusförmigen Einschwingen. Die ermittelten Zeiten ergeben sich, je nach Halbwelle, aus dem Einlaufen in das Toleranzband von oben oder unten.

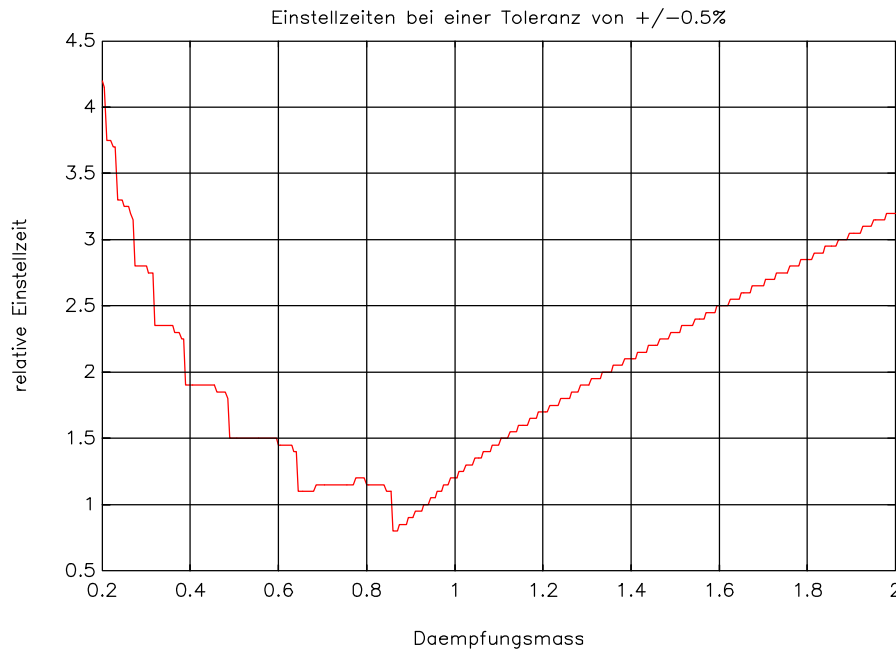


Bild 11: Relative Einstellzeit eines Systems 2. Ordnung mit der ungedämpften Schwingungsperiode 1. Angegeben sind die dämpfungsabhängigen Zeiten, die erforderlich sind, bis die Sprunganwort endgültig in das Toleranzband (s. Bild 10) eingelaufen ist, hier +/-0.5%.

Bei der **Impulsantwort** wird die Meßgröße als Stoß ausgeführt. Ideal wäre ein **Dirac-Stoß**, ein abstrakter Verlauf eines Impulses verschwindender Dauer, unendlicher Höhe und dem Flächeninhalt 1. Technisch wird der Dirac-Stoß über eine Näherung durchgeführt, d.h. ein 'verschliffener' Kurvenverlauf von kurzer Dauer und definierter Fläche. Die Impulsantwort bietet den Vorteil, daß aus ihr unmittelbar der Frequenzgang (siehe nächsten Abschnitt), z.B. mittels der Fast Fourier Transformation, errechnet werden kann, da die Impulsantwort der Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems entspricht.

Seltener wird die **Rampenantwort** zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von Meßsystemen herangezogen. Die Meßgröße wird hier aus einem Arbeitspunkt, in der Regel dem Nullpunkt, linear ansteigend verändert. Bei trägheitsbehafteten, und somit verzögerten, Systemen bleibt der Anzeigewert 'hinter' dem wahren Wert zurück. Diese als **Geschwindigkeitsfehler** bezeichnete Abweichung wird gelegentlich in der Regelungstechnik zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens herangezogen.

Eine besonders aussagekräftige und daher auch besonders häufige Beschreibung der Dynamik gewinnt man durch die **Sinusantwort**. Hierbei wird die Meßgröße sinusförmig (harmonisch) verändert:

$$x_e(t) = \hat{x}_e \sin(\omega t + \phi_0) \tag{11}$$

Der Eingangsgröße ist eine Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ (f = Frequenz), bzw. Periodenlänge $T=1/f$, eine Amplitude \hat{x}_e und eine Phasenlage ϕ_0 zugeordnet. Nach dem Abklingen der Einschwingvorgänge liegt nur noch die reine Sinusantwort als Anzeige vor (Bild 12):

$$x_a(t) = \hat{x}_a \sin(\omega t + \phi) \tag{12}$$

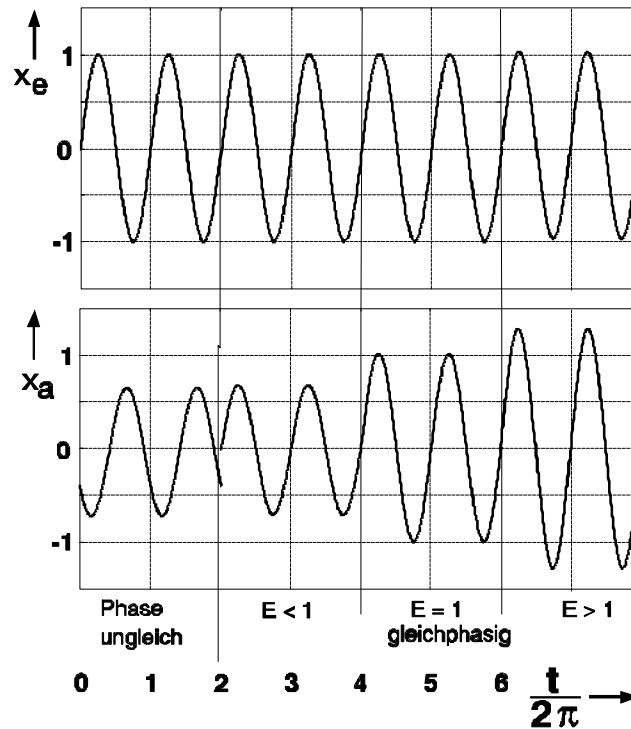


Bild 12: Sinusantwort eines Meßsystems mit verschiedenen Phasenlagen und Empfindlichkeiten

Die Amplituden der Meßgröße und der Anzeigegröße lassen sich in das Verhältnis zueinander in Abhängigkeit der imaginären Kreisfrequenz $j\omega$ setzen. Es kann als Faktor oder als logarithmierter Wert

$$G_0(j\omega) = 20 \lg \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} \tag{13}$$

in Dezibel (dB) ausgedrückt werden. Beim dB-Wert sind die Einheiten zu beachten. Sind Ein- und Ausgangsgröße mit unterschiedlichen Einheiten behaftet, ist jeweils auf einen Bezugswert zu normieren, so daß der Faktor dimensionslos ist. Wird die Periode T groß gegenüber der Zeitkonstanten des Meßgerätes gewählt, also sehr langsam und niederfrequent die Sinusantwort ermittelt, dann entspricht das Amplitudenverhältnis dem Betrag der statischen Empfindlichkeit E . In der Regel liegt die Phase bei kleiner Frequenz bei 0 oder 180° , je nach Vorzeichen von E .

Wird die Sinusantwort über einen weiten Bereich der Kreisfrequenz aufgetragen, dann ergibt sich der **Frequenzgang**. Normalerweise wird er über der logarithmischen Skale der Kreisfrequenz, getrennt nach logarithmiertem Betrag in dB und der Phase in rad oder Grad aufgetragen. Diese häufig verwendete Darstellung bezeichnet man als **Bodediagramm** (Bild 13). Der Frequenzgang gibt detaillierten Aufschluß über das dynamische Verhalten. So sind hier, in Abhängigkeit der Frequenz, die Veränderungen der Empfindlichkeit und Phasenverschiebungen abzulesen. Abhängig von der Toleranz gegenüber diesen Veränderungen ergibt sich hieraus die maximale Frequenz, mit der gemessen werden kann. Diese muß nicht mit der in der Regelungs- oder Nachrichtentechnik üblichen **Grenzfrequenz (-3dB-Wert)** übereinstimmen. In der Regel weisen Meßsysteme ein Tiefpaßverhalten auf. Für kleine Kreisfrequenzen strebt der Wert G_0 gegen die statische Empfindlichkeit, für große Werte der Kreisfrequenz strebt er gegen 0 . Dazwischenliegende Überhöhungen sind aber, bei

schwingungsfähigen Systemen zum Beispiel, auch möglich. Hinweis: Der Frequenzgang steht in einem mathematischen Zusammenhang zur Gewichtsfunktion, bzw. Impulsantwort.

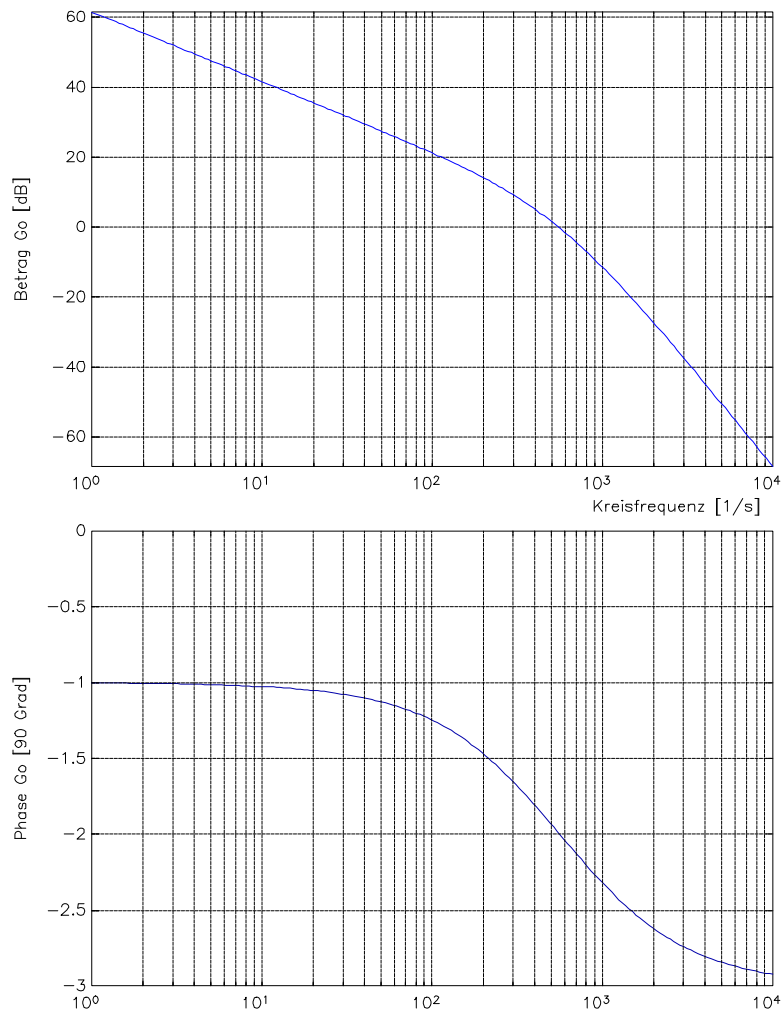


Bild 13: Beispiel eines Bodediagramms

Details zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Systemen sind auch Bestandteil der Regelungstechnik und Systemtheorie, bzw. der systemtheoretisch orientierten Meßtechnik [6][9].

1.5.4 Systematische Meßfehler

Die Ursachen eines systematischen Fehlers sind bekannt. Damit läßt sich der wahre Meßwert x_w aus dem angezeigten Meßwert x berechnen:

$$x_w = x - \Delta x = x \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right) \quad (14)$$

Dabei ist Δx der einheitenbehaftete absolute Fehler. $\Delta x/x$ ist der auf den Meßwert bezogene relative Fehler. Ein systematischer Fehler kann z.B. ein Nullpunktsfehler oder ein Empfindlichkeitsfehler (E) sein. Wird beispielsweise bei einem Voltmeter eine Spannung von $x=100,6V$ angezeigt und ist Δx mit $+0,6V$ bekannt, dann ergibt sich für den wahren Meßwert $x_w=100V$. Der relative Fehler beträgt dann $\Delta x/x=+0,006$.

Wie sich diese Fehler in Rechenvorschriften fortpflanzen, wird in einem gesonderten Kapitel abgehandelt.

1.5.5 Zufällige Meßfehler

Zufällige Fehler werden hervorgerufen durch nicht erfaßbare und nicht beeinflussbare Änderungen des Meßgerätes, des Beobachters und der Umwelt. Betrag und Vorzeichen dieser Fehler sind nicht vorhersagbar. Daher kann sich bei mehrmaligem Messen jedesmal ein neuer Anzeigewert einstellen, obwohl sich der Wert der Meßgröße nicht verändert hat. Der Anzeigewert unterliegt einer Streuung. In diesem Fall wird aus den wiederholt ermittelten Meßwerten x_i der Mittelwert \bar{x} gebildet und dieser wird als Erwartungswert der Meßgröße als der wahre Meßwert x_w angesehen:

$$x_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ für } N \rightarrow \infty \tag{15}$$

Er hat die Eigenschaften, daß die Summe der linearen Abweichungen zu Null gehen

$$\sum (x_i - x_w) = 0 \tag{16}$$

und die Summe der quadratischen Abweichungen zu einem Minimum wird:

$$\sum (x_i - x_w)^2 = \text{Minimum} \tag{17}$$

Für sehr große N und viele voneinander unabhängige Einflußgrößen nimmt die Verteilung/Streuung der Meßwerte um den Erwartungswert einen Kurvenverlauf an, der in der Regel immer mehr einer Glocke gleicht (Glockenkurve, Gauß'sche Glockenkurve; Bild 14). Die Meßwerte sind dann normalverteilt. Als Maß für die Streuung der Meßwerte dient die Varianz σ^2

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_w)^2 \text{ für } N \rightarrow \infty \tag{18}$$

Die positive Quadratwurzel der Varianz wird Standardabweichung σ genannt.

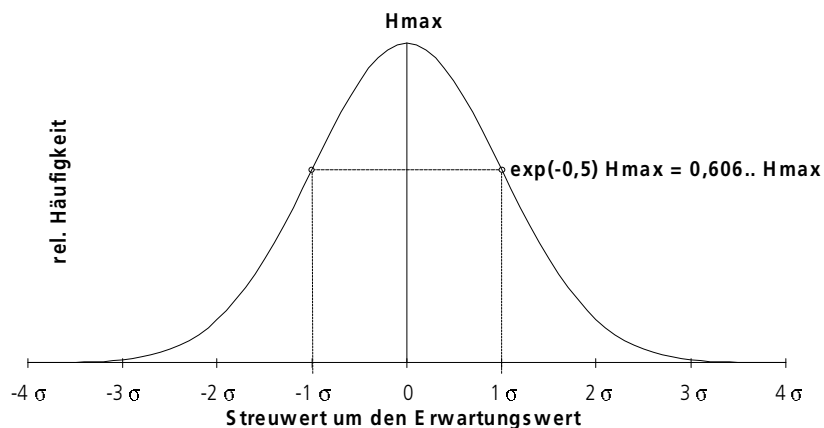


Bild 14: Häufigkeitsverteilung von Meßwerten bei Gauß'scher Normalverteilung; aufgetragen ist die Verteilung über Vielfache der Standardabweichung σ .

Betrachten wir nochmals die Gauß'sche Glockenkurve. Sie nimmt in der Meßtechnik eine zentrale Stellung bei der Behandlung zufälliger Fehler ein. Bei unabhängigen Einflußgrößen

und großer Anzahl N von Meßwerten läßt sich eine relative Häufigkeitsverteilung wie in Bild 14 beobachten. Aufgetragen sind die relativen Häufigkeiten, genauer gesagt die Häufigkeitsdichte, von ermittelten Meßwerten. Wird ein Intervall von Meßwerten betrachtet, also z.B. alle Meßwerte in den Schranken von a bis b, dann liefert die Fläche unter der Verteilungskurve die relative Anzahl der Meßwerte, bezogen auf alle Meßwerte.

Nachfolgend sind einige Eigenschaften von Häufigkeitsverteilungen aufgelistet. Zunächst, allgemeingültig, ist die Fläche unter einer Verteilungskurve = 1, denn sie umfaßt alle Meßwerte, die eben 100% aller Häufigkeiten abdecken. Speziell für die Gauß'sche Glockenkurve

$$H(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_w)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{19}$$

gilt:

Maximalwert H_{\max} : $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$

rel. Häufigkeiten zwischen

-3σ bis +3σ:	99,7%
-2σ bis +2σ:	95,5%
-1σ bis +1σ:	68,3%

Die Kurve ist symmetrisch um den Erwartungswert und besitzt dort ihr Maximum H_{\max} .

In der Praxis können nicht unendlich viele einzelne Meßwerte aufgenommen werden. Aus diesem Grunde wird der aus der begrenzten Zahl N gewonnene Mittelwert \bar{x}_w als Schätzwert \hat{x}_w für den wahren Wert genommen

$$\bar{x}_w = \hat{x}_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ für } N < \infty \tag{20}$$

Ein Schätzwert $\hat{\sigma}^2$ für σ kann ebenfalls angegeben werden, allerdings nicht aus Gl.(18), da der wahre Wert x_w nicht bekannt ist. In diesem Fall kann mit dem Schätzwert gearbeitet werden. Wie später noch ausgeführt (Gl.(66)) wird, wird dann, um einen "erwartungstreuen" unverzerrten Schätzwert $\hat{\sigma}$ zu erhalten, nicht durch N sondern nur durch die Anzahl N-1 der Vergleichsmessungen dividiert. Statt $\hat{\sigma}$ wird das Formelzeichen s eingeführt:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_w)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_w)^2 \tag{21}$$

Die positive Quadratwurzel s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_w)^2}{N-1}} \tag{22}$$

wird als

- Standardabweichung der Meßwerte x_i ,
- mittlere (quadratische) Abweichung (vom Mittelwert) der Meßwerte x_i ,
- mittlerer (quadratischer) Fehler (Abweichung vom wahren Wert) der Meßwerte x_i

bezeichnet.

Wie sich diese Fehler in Rechenvorschriften fortpflanzen, wird in einem gesonderten Kapitel abgehandelt.

1.5.6 Fehlerfortpflanzung und Vertrauensbereich

1.5.6.1 Fehlerfortpflanzung der systematischen Fehler

Für die Betrachtung der **Fehlerfortpflanzung der systematischen Fehler** nehmen wir folgendes Modell:

Eine Größe y in Bild 15 sei durch direkte Messung nicht zugänglich, jedoch die Größen $x_1..x_n$ seien meßbar, mit Fehlern Δx_i behaftet und stehen mit y in einem bekannten Zusammenhang

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{23}$$

Die Einzelfehler Δx_i führen zu einem Gesamtfehler Δy , den es abzugrenzen gilt.

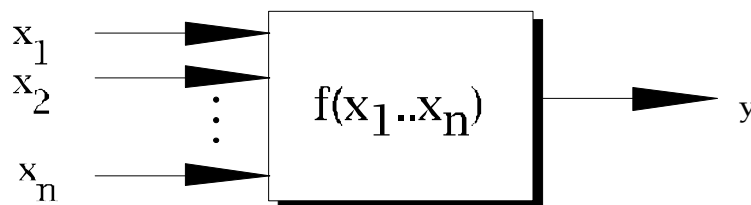


Bild 15: Einfluß $f(\dots)$ der meßbaren und mit systematischen Fehlern behafteten Größen $x_1 .. x_n$ auf eine nicht zugängliche Größe y

Dabei ist

$$\Delta y = y - y_w = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1 - \Delta x_1, \dots, x_n - \Delta x_n) \tag{24}$$

die Differenz zwischen dem fehlerbehafteten und dem fehlerfreien, "wahren" Funktionswert. Wird Gl.(24) in eine Taylorreihe bis zum ersten Glied entwickelt, was bei $\Delta x_i \ll x_i$ zulässig ist, dann erhalten wir

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \text{für } \Delta x_i \ll x_i \tag{25}$$

Da bei systematischen Fehlern Δx_i Vorzeichen und Betrag bekannt sind, läßt sich der wahre Wert y_w errechnen:

$$y_w = y - \Delta y \quad (26)$$

Beispiel 1:

Liegt f als eine Linearkombination vor, wie dies z.B. bei einer aneinander gereihten Längenmessung der Fall sein könnte, dann gilt

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad (27)$$

und aus Gl.(24) errechnet sich dann nach Gl.(25) für den resultierenden Fehler von y

$$\Delta y = a_1 \Delta x_1 + \dots + a_n \Delta x_n \quad (28)$$

Der absolute Gesamtfehler ist also die Summe der mit den Koeffizienten a_i multiplizierten Einzelfehler, was in dem Beispiel der Längenmessung auch unmittelbar einzusehen ist.

Beispiel 2:

Die einzelnen Größen hängen über eine Multiplikation zusammen, wie z.B. bei einer Wärmeverbrauchs- messung einer Hausheizung. Hier wird der Durchfluß der Heizflüssigkeit und die Temperaturdifferenz zwischen Zu- und Abfluß miteinander zu multipliziert. Allgemeiner können die Einzelwerte x_i noch in den Potenzen α_i auftreten:

$$y = a_1 x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_n x_n^{\alpha_n} \quad (29)$$

Somit ergibt sich für jedes x_i der Einfluß nach Gl.(25) mittels partieller Ableitung. Hier beispielhaft für x_1

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 a_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot a_2 x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n x_n^{\alpha_n} = y \frac{\alpha_1}{x_1} \quad (30)$$

Der Gesamtfehler Δy setzt sich dann aus der Summe der Einflüsse der Einzelfehler gemäß Gl.(25) zusammen

$$\Delta y = y \sum_i a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (31)$$

oder als relativer Gesamtfehler

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_i a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (32)$$

Er ergibt sich also aus der Summe der mit den Exponenten α_i gewichteten relativen Einzelfehlern x_i . (Weitere Betrachtungen zu diesem Beispiel siehe Gln.(71)(74)).

1.5.6.2 Fehlerfortpflanzung der zufälligen Fehler

Für die **Fortpflanzung der zufälligen Fehler** betrachten wir wieder das Modell aus Bild 15, beschrieben durch die Relation Gl.(23). Dabei seien x_i wieder die zugänglichen, einzelnen Meßgrößen und y die nicht unmittelbar, aber nach Gl.(23) errechenbare, eigentliche

Meßgröße. Da nun Zufallsfehler vorliegen, wurde jede der Größen x_i , also x_1, \dots, x_n , wiederholt gemessen. Es liegen also Meßwerte x_{ij} vor, die mit Doppelindizes i und j gekennzeichnet sind. Dabei gibt i die Zugehörigkeit zu einer Meßgröße an und j kennzeichnet, die wievielte Messung der Meßgröße i vorliegt. Aus den Meßwerten können nun für die einzelnen Meßgrößen i die Mittelwerte $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ und die Standardabweichungen $s_1 \dots s_n$ ermittelt werden. Ziel ist es, für die eigentliche Meßgröße y aus den vielen Meßwerten x_{ij} einen Mittelwert \bar{y} und eine Standardabweichung σ_y zu ermitteln.

Nachfolgend wird, o.E.d.A., eine Rechenvorschrift hergeleitet, bei der y nur von zwei einzelnen Meßgrößen, x_1 und x_2 , abhängen soll.

Bestimmung des Mittelwertes \bar{y} :

Die Größe x_1 wurde m -mal gemessen, es liegen also die Meßwerte $x_{11} \dots x_{1m}$ vor. Ein beliebiger Wert x_{1i} weicht vom zugehörigen Mittelwert um Δx_{1i} ab:

$$\Delta x_{1i} = x_{1i} - \bar{x}_1 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{1k} \tag{33}$$

Entsprechend gilt für die r Meßwerte der zweiten Meßgröße x_2 :

$$\Delta x_{2j} = x_{2j} - \bar{x}_2 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r x_{2k} \tag{34}$$

Für ein beliebig herausgegriffenes Meßwertepaar x_{1i} und x_{2k} läßt sich ein y_{ik} ermitteln:

$$y_{ik} = f(x_{1i}, x_{2k}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_{1i}, \bar{x}_2 + \Delta x_{2k}) \tag{35}$$

Wird f als Taylorreihe bis zum ersten Glied entwickelt, dann läßt sich statt Gl.(35) auch schreiben

$$y_{ik} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \Delta x_{2k} \tag{36}$$

Der Mittelwert \bar{y} der y_{ik} wird dann

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r y_{ik} \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \left[f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \Delta x_{2k} \right] \\ \bar{y} &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{1}{m} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \sum_{i=1}^m \Delta x_{1i} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \sum_{k=1}^r \Delta x_{2k} \\ \bar{y} &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{aligned} \tag{37}$$

da gemäß der Definition des Mittelwertes, bzw. dessen Erwartungswertes x_w (GLn. (15)(16)) die Summen der Abweichungen zu Null werden:

$$\sum \Delta x_{1i} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \Delta x_{2k} = 0 \tag{38}$$

Der Mittelwert \bar{y} der gesuchten, resultierenden Größe ergibt sich also aus den Mittelwerten \bar{x}_i der gemessenen Größen. Allgemein gilt:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (39)$$

Bestimmung der Standardabweichung σ_y :

Für die Betrachtung der Fortpflanzung der zufälligen Fehler soll zunächst die wahre Standardabweichung σ_y (nicht ihr Schätzwert s_y) der y-Werte berechnet werden. Dazu wird angenommen, daß die entsprechenden Standardabweichungen σ_1 und σ_2 der x-Werte bekannt sind. In Anlehnung an Gl.(18) wird σ_y definiert als

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r (y_{ik} - y_w)^2} \quad (40)$$

Um die Standardabweichung σ_y zu berechnen, wird von Gl.(36) ausgegangen. Wir führen Gl.(37) mit $y_w = \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ein, anschließend wird umgestellt, quadriert und summiert:

$$y_{ik} - \bar{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2k} \quad (41)$$

$$(y_{ik} - \bar{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2k}\right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2k} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r (y_{ik} - \bar{y})^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2k}\right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2k} \end{aligned} \quad (43)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite in Gl.(43) wird wegen der wechselnden Vorzeichen der Δx_{1i} und Δx_{2k} ungefähr Null und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r (y_{ik} - \bar{y})^2 = r \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sum_{i=1}^m \Delta x_{1i}^2 + m \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sum_{k=1}^r \Delta x_{2k}^2 \quad (44)$$

Werden auf der rechten Seite die Quadrate der Standardabweichungen

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta x_{1i}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \Delta x_{2k}^2 \quad (45)$$

eingesetzt, dann ergibt sich

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r (y_{ik} - \bar{y})^2 = r m \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_1\right)^2 + m r \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_2\right)^2 \quad (46)$$

Wird nun durch "m·r" dividiert und anschließend radiziert, steht auf der linken Seite die in Gl.(40) definierte Standardabweichung, die sich aus den auf der rechten Seite stehenden bekannten Größen errechnen läßt:

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2} \quad (47)$$

Gl.(47) ist das sogenannte **Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz**, das sich auf zufällige Fehler bezieht. Die gesuchte Standardabweichung der y-Werte ergibt sich, indem die Standardabweichungen der gemessenen Größen mit den an der Stelle (\bar{x}_1, \bar{x}_2) genommenen partiellen Ableitungen multipliziert und geometrisch addiert werden. Für n Variable, statt 2, geht Gl.(47) in ihre allgemein gültige Form

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 \sigma_j^2} \quad (48)$$

über. In der Praxis sind nicht die Standardabweichungen σ_i , sondern nur ihre Schätzwerte s_i (Gl.(21)) bekannt. Werden diese s_i nach Gl.(48) behandelt, so entsteht ein Schätzwert s_y für die Standardabweichung der y-Werte:

$$s_y = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 s_j^2} \quad (49)$$

Diese Formel läßt sich auch geometrisch deuten: Die partiellen Ableitungen in Gl.(49) geben an, in welchem Maß sich eine "Änderungsbreite" (Varianz!) s_j bei einer bestimmten Größe x_j auswirkt. Die Gesamtauswirkung ergibt sich dann als geometrische Addition (vgl. Vektoraddition).

Beispiel 3:

Bei einem Abfüllprozeß von einem Gut der Masse g_2 in eine Verpackung der Masse g_1 wird beides zusammen gewogen. Die statistischen Werte des Verpackungsgewichtes \bar{g}_1 sind bekannt (siehe Gl.(50)), mit der zugehörigen Standardabweichung $s_1 = 5g$. Das Gesamtgewicht g_3 von Inhalt und Verpackung ist im Mittel \bar{g}_3 mit der Standardabweichung $s_3 = 9g$. Zu bestimmen seien der Mittelwert und die Standardabweichung der Einwage $g_2 = g_3 - g_1$.

Der Mittelwert \bar{g}_2 errechnet sich nach Gl.(37) zu

$$\bar{g}_2 = \bar{g}_3 - \bar{g}_1 = 600g - 80g = 520g \quad (50)$$

Die Standardabweichung ist nach Gl.(49)

$$s_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial g_2}{\partial g_3}\right)^2 s_3^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial g_1}\right)^2 s_1^2} = \sqrt{1^2 \cdot 9^2 + (-1)^2 \cdot 5^2} g = 10,3g \quad (51)$$

Bei normalverteilten Gewichten haben demnach, gemäß Gl.(19), 95 von 100 Packungen einen Inhalt von $520g \pm 2s_2 = (520 \pm 20,6)g$.

1.5.6.3 Vertrauensbereich für den Mittelwert

Mittels des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes läßt sich auch die Qualität des errechneten Mittelwertes bestimmen. Der Mittelwert \bar{x} ist ja nur ein Schätzwert, der nicht mit dem wahren Wert übereinstimmen muß. Als Qualitätsmerkmal kann die Abweichung angesehen werden, die jedoch nur in Form einer Wahrscheinlichkeit angegeben werden

kann, die beschreibt, mit welcher statistischen Sicherheit sich der geschätzte Mittelwert innerhalb definierter Grenzen befindet.

Im ersten Schritt der Betrachtung sollen unendlich viele Meßwerte von Einzelmessungen zu einer Meßgröße vorliegen und deren (wahren) Mittelwert (Gl.(15)) und die Standardabweichung σ (Gl.(18)) seien daraus bestimmt.

Im zweiten Schritt wird eine erste Stichprobe, bestehend aus N Meßwerten, aus den unendlich vielen Einzelmeßwerten entnommen. Daraus läßt sich nach Gl.(20) ein erster Mittelwert \bar{x}_1 berechnen. Wird eine zweite Stichprobe, ebenfalls mit N Einzelmeßwerten, aber nicht identisch mit der vorangegangenen Stichprobe, entnommen, läßt sich daraus ebenfalls ein Mittelwert \bar{x}_2 ermitteln, der vom ersten (\bar{x}_1) abweicht.

Bei unendlich vielen Einzelmeßwerten lassen sich beliebig viele Mittelwerte \bar{x}_i aus N Meßwerten ($N < \infty$) ermitteln. Die Häufigkeitsverteilung der Mittelwerte läßt sich analog der Verteilung der Einzelmessungen (Bild 14) angeben. Zu der Verteilung der Mittelwerte gehört ein Mittelwert $\bar{\bar{x}}$, also sozusagen der Mittelwert der Mittelwerte, und eine Varianz der Mittelwerte $\sigma_{\bar{x}}^2$:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \quad (52)$$

Es wird sich zeigen, daß die Streuung der Mittelwerte um den Mittelwert der Mittelwerte geringer ist, als die Streuung der Einzelmesswerte um deren Mittelwerte. Sie liegen umso enger beieinander, je größer die Zahl N der in die Mittelwerte eingegangenen Einzelmeßwerte ist. D.h. aber auch, daß sich bei wachsendem N der Mittelwert der Mittelwerte immer weniger von dem Mittelwert der Einzelmessungen unterscheidet

$$\bar{\bar{x}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x_W \quad (53)$$

Bei hinreichend vielen und umfangreichen Stichproben darf

$$\bar{\bar{x}} = x_W \quad (54)$$

angenommen werden.

Die in die Mittelwerte eingehenden Einzelmeßwerte stammen aus einer Verteilung mit der Standardabweichung σ . Das bedeutet, daß die für jede einzelne Stichprobe gezogenen Werte, bei ausreichend großem N, ebenfalls die Standardabweichung σ haben. Mit Gl.(52)

$$\frac{\partial \bar{\bar{x}}}{\partial x_i} = \frac{1}{N} \quad (55)$$

und insgesamt N Mittelwerten errechnet sich die Varianz, bzw. Standardabweichung der Mittelwerte $\sigma_{\bar{x}}$ nach Gl.(40) zu

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 (\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{1}{N^2} N \sigma^2 \quad (56)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (57)$$

Die Standardabweichung ist demnach um $1/\sqrt{N}$ kleiner als die der Einzelmeßwerte. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% (Gauß'sche Verteilung) liegt also ein Mittelwert im Bereich $\bar{x} \pm \sigma/\sqrt{N}$. Dies bedeutet, daß der unbekannte wahre Wert mit der Wahrscheinlichkeit von 68% höchstens um $\pm\sigma/\sqrt{N}$ von dem gefundenen Mittelwert \bar{x} abweicht:

$$|\bar{x} - x_j| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{58}$$

In der Praxis ist aber die Standardabweichung σ der Meßanordnung in der Regel unbekannt, so daß nur mit einem Schätzwert s (s. Gln.(21)(22)) gerechnet werden kann. Sinngemäß gilt dann, daß der wahre Wert

Mit der Wahrscheinlichkeit von	um höchstens
50%	$\pm 0,675 \cdot s/\sqrt{N}$
68%	$\pm 1 \cdot s/\sqrt{N}$
95%	$\pm 2 \cdot s/\sqrt{N}$
99%	$\pm 3 \cdot s/\sqrt{N}$

vom gefundenen Mittelwert \bar{x} abweicht. Die mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% noch bestehende **Unsicherheit** wird als **mittlerer Fehler** $\Delta\bar{x}$ des Mittelwertes bezeichnet:

$$\Delta\bar{x} = |\bar{x} - \bar{x}| = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{59}$$

Das Meßergebnis x wird in Form des Mittelwertes \bar{x} (=Schätzwert für den wahren Mittelwert) und seinen Grenzen angegeben:

$$x = \bar{x} \pm a \frac{s}{\sqrt{N}} = \bar{x} \left(1 \pm \frac{as}{\bar{x}\sqrt{N}} \right) \tag{60}$$

wobei der Faktor a entsprechend der gewünschten Aussagewahrscheinlichkeit gewählt (und mit angegeben) wird.

Die zufälligen Fehler können im Gegensatz zu den systematischen Fehlern nicht korrigiert werden. Es ist nur möglich, durch eine hinreichend große Zahl von Messungen die Unsicherheit des Meßwertes einzuengen.

Beispiel 4:

Es liegt eine Meßreihe mit 10 Einzelmessungen von einer Spannungsmessung vor:

i	Meßwerte x_i in Volt	$(x_j - \bar{x})^2$ in Volt ²
1	6,7	0,04
2	6,4	0,01
3	6,3	0,04
4	6,6	0,01
5	6,5	0
6	6,7	0,04
7	6,5	0
8	6,3	0,04

9	6,6	0,01
10	6,4	0,01
Σ	65	0,2

Aus den ermittelten Daten ergeben sich folgende Rechenwerte:

Mittelwert nach Gl.(20):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{65V}{10} = 6,5V \quad (61)$$

Standardabweichung s nach Gl.(22):

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{0,2V^2}{9} \Rightarrow s = 0,15V \quad (62)$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes $\Delta\bar{x}$ nach Gl.(59):

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0,15V}{\sqrt{10}} = 0,047V \quad (63)$$

Das **Meßergebnis** wird mit einer Sicherheit von 68% als Mittelwert nach Gl.(60) angegeben durch:

$$x = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{N}} = (6,5 \pm 0,047)V \quad (64)$$

Untersuchung des Schätzwertes $\hat{\sigma}$

Nach der Qualitätsbeurteilung des Mittelwertes, dessen mittlerer Fehler aus Gl.(59) mit

$$|x_W - \bar{x}| = |\bar{x} - x_W| = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (65)$$

errechenbar ist, wird eine analoge Betrachtung für den Schätzwert $\hat{\sigma}$ durchgeführt. Dazu betrachten wir erneut die Gleichung Gl.(21) für den Schätzwert der Standardabweichung s und wollen ergründen, warum für diesen Schätzwert nur durch die Zahl der Vergleichsmessungen, also N-1, und nicht die Gesamtzahl N zu dividieren ist. Wird statt \hat{x}_W der wahre Wert x_w eingeführt und anschließend die rechte Seite umgeformt, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [(x_i - x_w) - (\bar{x} - x_w)]^2 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x_w)^2 - 2(x_i - x_w) \sum_{i=1}^N (x_i - x_w) + N (\bar{x} - x_w)^2 \right] \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x_w)^2 - 2(\bar{x} - x_w)(N\bar{x} - Nx_w) + N (\bar{x} - x_w)^2 \right] \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_w)^2 - \frac{N}{N-1} (\bar{x} - x_w)^2 \end{aligned} \quad (66)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beinhaltet definitionsgemäß (Gl.(18)) die Varianz σ^2 .

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - x_w)^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2 \quad (67)$$

Der zweite Term beschreibt die mittlere Abweichung zwischen Mittelwert und wahren Wert (Gl.(65)):

$$\frac{N}{N-1} (\bar{x} - x_w)^2 = \frac{N}{N-1} \frac{\sigma^2}{N} = \frac{\sigma^2}{N-1} \quad (68)$$

Indem die beiden letzten Ergebnisse in Gl.(65)(66) eingefügt werden, folgt

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2 - \frac{1}{N-1} \sigma^2 = \sigma^2 \quad (69)$$

Die Teiler N-1 kürzen sich heraus. Damit ist nur bei diesem Ansatz, also wo nur durch die Anzahl der Vergleichsmessungen dividiert wird, der Schätzwert $\hat{\sigma}$ unverzerrt ("biasfrei") und ist mit der in Gl.(65) steckenden Wahrscheinlichkeit von 68% ein Maß für die tatsächliche Standardabweichung σ .

1.5.6.4 Fortpflanzung der Fehlergrenzen

Die bis jetzt behandelten systematischen und zufälligen Fehler werden nur in Sonderfällen im einzelnen analysiert. In der Praxis gängig ist die Fehlerbetrachtung anhand der Garantiefehlergrenze oder der Klassengenauigkeit (siehe Gl.(3)).

Betrachten wir wieder unser Modell Bild 15, bzw Gl.(26), dann wird die Größe y aus den gemessenen Größen x_1, \dots, x_n berechnet. Die gemessenen Größen sollen mit Meßgeräten der Garantiefehlergrenzen G_1, \dots, G_n und den Meßbereichsendwerten X_1, \dots, X_n gemessen worden sein. Damit ergeben sich die Meßunsicherheiten $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Gesucht ist nun die resultierende Unsicherheit des Ergebnisses y. Anmerkung: ggf. ist statt des Meßbereichsendwertes der Meßbereich einzusetzen, je nach dem, auf was die Garantiefehlerangabe bezogen ist.

Wir unterscheiden zwischen der maximal möglichen Unsicherheit Δy^* und der wahrscheinlichen Unsicherheit Δy^{**} .

Bei der maximal möglichen Unsicherheit Δy^* wird der ungünstigste Fall angenommen und die Beträge der Fehlergrenzen linear addiert (eine sog. "worst case"-Betrachtung). Nach Gl.(25) ergibt sich dann (in Anlehnung an das totale Differential)

$$\Delta y^* = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i G_i \right| \quad (70)$$

oder bei multiplikativer Verknüpfung der Meßgrößen x_i , wie bei o.a. Beispiel (Gl.(32))

$$\Delta y^* = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i G_i \right| \quad (71)$$

Der Meßwert wird dann angegeben als

$$y_w = y \pm \Delta y^* = y \left(1 \pm \frac{\Delta y^*}{y} \right) \quad (72)$$

Die durch Gl.(70) abgesteckten Grenzen werden als maximale oder sichere Ergebnisfehlergrenzen bezeichnet. Die so berechneten Unsicherheiten sind sehr unwahrscheinlich. Es kann davon ausgegangen werden, daß jedes x_i seine Fehlergrenze nicht voll ausschöpft und dabei alle x_i vom Vorzeichen her in die gleiche Richtung weisen. Es darf davon ausgegangen werden, daß sich Fehler zum Teil ausmitteln.

Deshalb wird häufig die wahrscheinliche Unsicherheit Δy^{**} mit geometrischer Addition der Fehlergrenzen herangezogen. Hierbei besteht jedoch das Problem, daß die Verteilung der Fehler innerhalb einer Fehlerklasse i.allg. nicht bekannt ist. So kann eine wahrscheinliche Fehlergrenze nicht mathematisch begründet werden. Es ist üblich, trotz Unterschiede zwischen der Garantiefehlergrenze, als äußerste Abweichung, und vom wahren Wert der Standardabweichung s , als mittlere Abweichung der einzelnen Meßwerte, für eine geometrische Addition zu übernehmen. Damit ergibt sich aus Gl.(49) für die statistische oder wahrscheinliche Fehlergrenze Δy^{**}

$$\Delta y^{**} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} X_i G_i \right)^2} \quad (73)$$

oder wieder bei multiplikativem Zusammenhang der Meßgrößen x_i , wie in o.a. Beispiel (Gl.(32))

$$\frac{\Delta y^{**}}{y} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} a_i \right)^2} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{X_i}{x_i} a_i G_i \right)^2} \quad (74)$$

Die durch die Gleichungen definierten wahrscheinlichen Unsicherheiten werden durch die praktischen Erfahrungen weitgehend bestätigt [7].

Das Meßergebnis wird wieder angegeben als

$$y_W = y \pm \Delta y^{**} = y \left(1 \pm \frac{\Delta y^{**}}{y} \right) \quad (75)$$

Beispiel 5:

Aus einer Wegmessung l , Garantiefehlergrenze $G_l=0,4\%$ vom Endwert, und einer Zeitmessung t , Garantiefehlergrenze $G_t=0,2\%$ vom Endwert, ist bei voller Ausnutzung des Meßbereichs die Meßunsicherheit der Geschwindigkeit $v=l/t$ zu bestimmen.

Die maximal mögliche Unsicherheit $\Delta v^*/v$ ergibt sich aus Gl.(71) zu

$$\frac{\Delta v^*}{v} = |1 \cdot 0,004| + |(-1) \cdot 0,002| = 0,006$$

und die wahrscheinliche Unsicherheit $\Delta v^{**}/v$ wird nach Gl.(74)

$$\frac{\Delta v^{**}}{v} = \sqrt{(1 \cdot 0,004)^2 + ((-1) \cdot 0,002)^2}$$

1.6 Darstellung von Meßwerten

Lernziel: Wie werden Meßergebnisse dargestellt bzw. angegeben? Diagramme, Protokolle, Meßkurven

Messungen können vielen Zwecken dienen. Je nach Zweck sind auch Meßergebnisse unterschiedlich detailliert zu behandeln. Ein Meßergebnis, welches aus einer Laboruntersuchung hervorgegangen ist, erfordert sicherlich einen höheren Aufwand in der Darstellung, als z.B. ein Meßwert, der einer Überwachung entnommen ist, bei dem lediglich Grenzwertüberschreitungen erfaßt werden sollen. Welche Angaben zu einem Meßwert gehören, ist im einzelnen zu prüfen. Die nachfolgenden Auflistungen sollen hierzu eine Hilfestellung geben.

Wie in den vorhergehenden Kapiteln dargestellt wurde, können in ein Meßergebnis eine Vielzahl von Parametern einfließen (vgl. hierzu Bild 2). Der Meßvorgang kann bei Wiederholung auch unterschiedliche Ergebnisse bringen. So hängen Meßergebnisse ab von

- der Meßgröße
- dem Meßgerät, bzw. dem Meßverfahren (Geräteklasse, Rückwirkung, ..),
- den Randbedingungen, wie z.B. den Einflüssen aus der Umwelt (Temperatur, Luftdruck, ..),
- demjenigen, der die Messung durchführt.

Ein einzelner Meßwert ist daher mit zusätzlichen Angaben zu versehen, der die Messung nachvollziehbar werden und auch die Qualität des Ergebnisses beurteilen läßt. Ein Meßergebnis sollte daher mit folgenden (Zusatz-)Informationen versehen sein:

- was gemessen wurde (Meßgröße),
- dem mit einer Einheit versehenen Meßwert selbst, in der Regel durch den Mittelwert nach Gl.(60), Gl.(72) bzw. Gl.(75) angegeben wird. Liegt nur ein einzelner Meßwert vor, ist dieser zu nehmen;
- dem Vertrauensbereich des Meßwertes (Mittelwertes), angeben aus den Garantiefehlergrenzen oder aus statistischen Werten mit der Angabe der relativen Häufigkeit, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit der Meßwert innerhalb des Vertrauensbereiches liegt, bzw. wenn nur ein einzelner Meßwert vorliegt, sollte dieser als solcher ausgewiesen sein;
- dem Randbedingungen, unter denen die Messung durchgeführt wurde,
- dem Zeitpunkt, wann die Messung durchgeführt wurde (Datum, Uhrzeit),
- dem Verantwortlichen, und
- dem Meßgerät, bzw. dem Meßverfahren, d.h. wie gemessen wurde.

Die ersten vier Punkte sind für eine seriöse Meßwertangabe nahezu ein Muß, während die letzten drei Punkte mehr den Charakter einer Zusatzinformation haben und die Messung leichter nachvollziehbar machen sollen. Alle aufgelisteten Punkte können in einem Meßprotokoll zusammengefaßt sein. Bei häufig wiederkehrenden gleichartigen Messungen empfiehlt sich ein formalisiertes Meßprotokoll.

Diese Aufstellung trifft natürlich nicht nur für einen einzelnen Meßwert zu. Selbstverständlich sind auch Meßreihen mit diesen Angaben zu versehen. Hierbei sind zwei unterschiedliche Typen von Meßreihen zu beachten.

Erstens die Meßreihen, bei denen eine Meßgröße durch Wiederholungsmessungen statistisch gesichert werden sollen. Dies führt letztendlich wieder zu einem Mittelwert mit Vertrauensbereich und entspricht wieder einem Meßwert.

Zweitens die Meßreihen, bei denen eine abhängige Größe, in der Regel die Meßgröße, einer anderen Größe gegenübergestellt wird. Diese andere Größe kann

- ein Zustand, z.B. Betriebszustand, der die Meßgröße beeinflusst. Dieser Betriebszustand kann z.B. durch eine Größe repräsentiert werden;
- eine Referenzgröße, wie z.B. bei der Kalibrierung eines Meßgerätes,
- die Zeit, wie beispielsweise bei Überwachungen, Prozeßkontrolle; Meßschreiber usw.

sein.

Solche Meßreihen können tabellarisch (siehe Beispiel zu Gl.(60)) oder graphisch dargestellt werden (Bild 16). Üblich ist, daß auf der x-Achse, der Abszisse, die unabhängige Größe (z.B. Referenz, Zeit,..) und auf der y-Achse, der Ordinate, die Meßgröße aufgetragen wird. Hierbei ist zu beachten, daß die paarweise gegenübergestellten Werte keine "Punkte" darstellen, sondern toleranzbehaftete Größen sind, und zwar sowohl die x- als auch die y-Werte Bild 17). Die Toleranz der unabhängigen Größe ist normalerweise kleiner als die der abhängigen (siehe Referenz) oder es wird sogar von einer fehlerfreien Messung der x-Werte ausgegangen.

Es ist i.allg. daher nicht sinnvoll, Zwischenwerte durch Interpolation zu bilden, also die Meß-"Punkte" durch Geradenstücke zu verbinden (Bild 18).

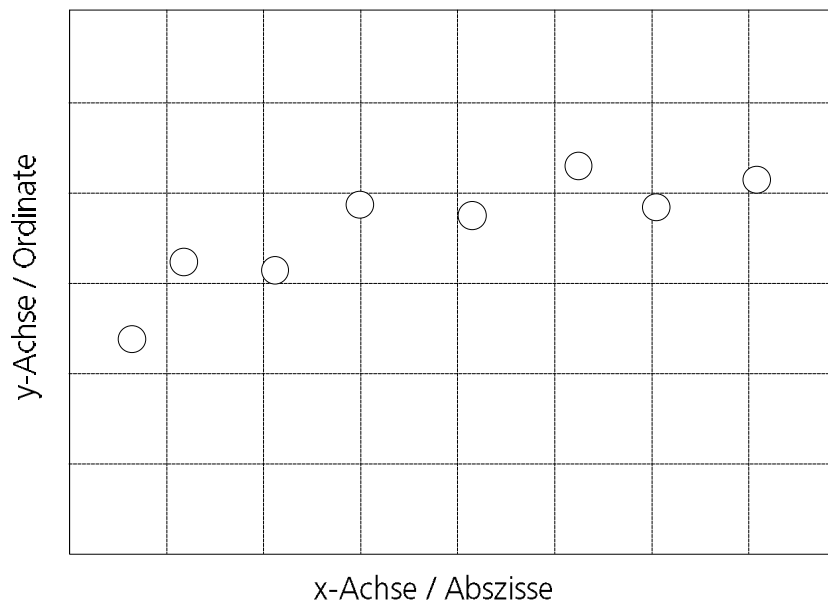


Bild 16: Beispiel einer Meßreihe mit einer unabhängigen (Referenz, x-Achse) und einer abhängigen Größe (Meßgröße, y-Achse).

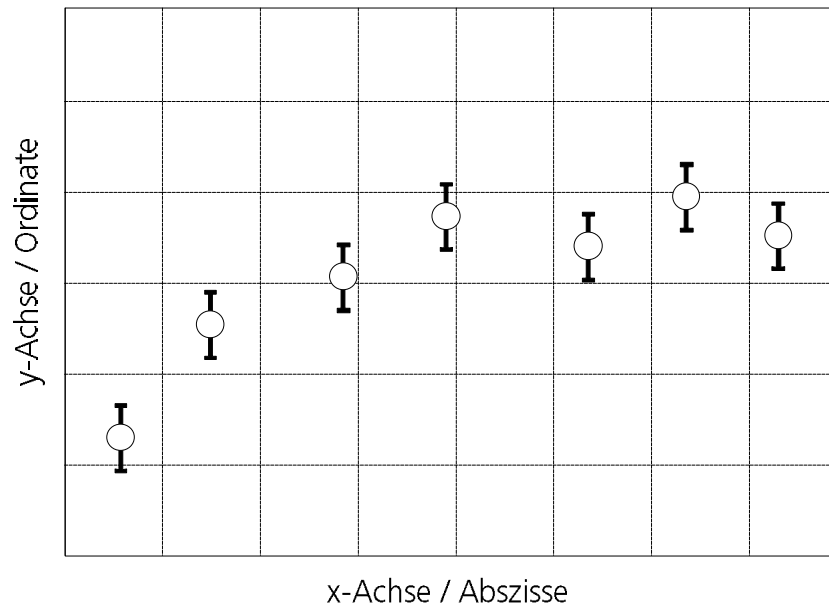


Bild 17: Vertikale Toleranzbalken (Vertrauensbereich) um die "Meßpunkte".

Die Interpolation ist nur in Sonderfällen sinnvoll, wenn z.B. keine statistische Werte für einen Vertrauensbereich und nur sehr wenige Meßpunkte vorliegen. Interpoliert werden kann nur zwischen zwei benachbarten Meßwertpunkten, den sogenannten Stützstellen. Damit ergeben sich stückweise Interpolationsgeraden, die aneinandergereiht einen geknickten Kurvenzug (Polygonzug) ergeben. Durch die Streuung der Meßwerte ergeben sich zum Teil unrealistisch starke Knickstellen, da benachbarte Punkte ungünstig liegen können. Knicke können durch interpolierende Spline-Funktionen [11] vermieden werden. Sie schmiegen sich möglichst "glatt" an die Stützstellen an, vermeiden aber nicht unrealistische Krümmungen infolge der Meßunsicherheiten.

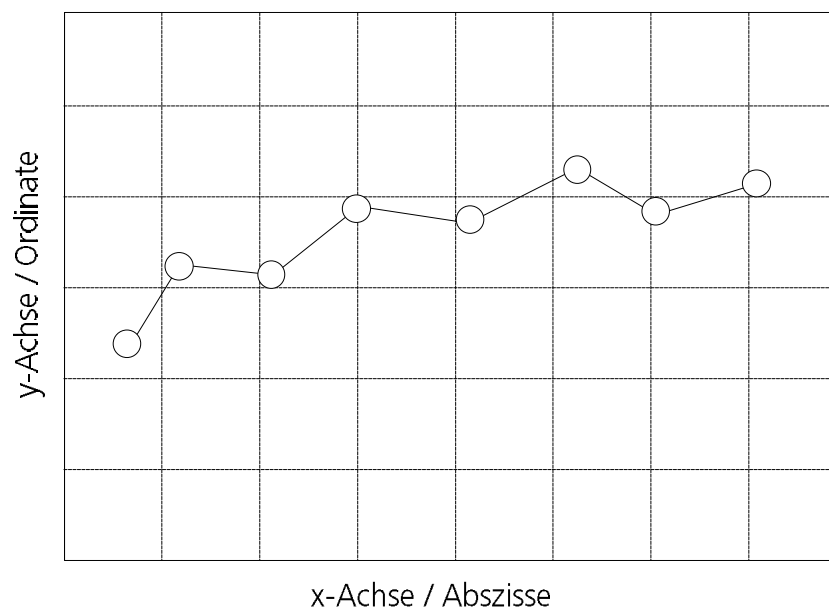


Bild 18: Interpolation von Meßwerten (siehe Text)

Normalerweise liegen solchen Meßreihen physikalische Zusammenhänge zu Grunde, die einen "glatten, natürlichen" Zusammenhang haben. Es ist deshalb günstiger, die Stützstellen

und deren Zwischenwerte zu approximieren. Hier gehen mehrere, ja mitunter sogar alle Meßwertepaare (Stützstellen) der Meßreihe in die Ermittlung der Zwischenwerte ein.

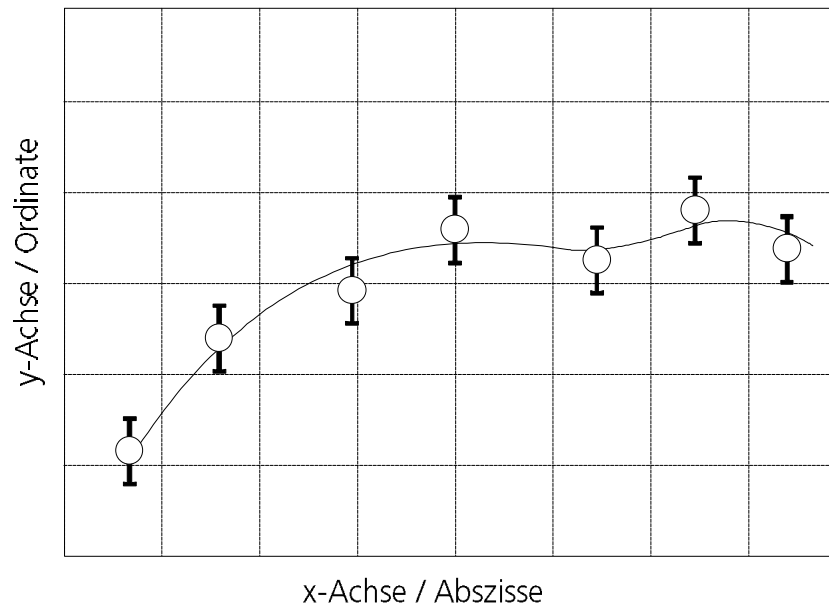


Bild 19: Toleranzbehaftete Meßwerte mit einer Ausgleichskurve

Ziel bei der Approximation ist es eine Kurve zu finden, die die Abhängigkeit zwischen den Wertepaaren mit möglichst geringem Fehler beschreibt, ohne dabei Sprünge oder Knick aufzuweisen (Bild 19). Wirklichkeitsnah ist das Problem zu lösen, wenn die physikalischen, und damit auch mathematischen, Zusammenhänge zwischen den Wertepaaren bekannt sind. Der mathematischen Beschreibung haften Parameter an, die dann aus den Meßwerten, z.B. nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (ähnlich Gl.(8)), bestimmt werden können. Ein klassisches Beispiel ist die Ausgleichsgerade [15], bei der eine Gerade $y(x) = a_g x + b_g$ durch die "Punkteschar" gelegt wird. Ein weiteres Beispiel, welches im nächsten Kapitel eingehend betrachtet wird, wäre die quadratische Abhängigkeit $y(x) = a_q x^2 + b_q x + c_q$ mit den Parametern a_q , b_q und c_q . Dabei werden (a_g, b_g) , bzw. (a_q, b_q, c_q) nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Diese Betrachtung ist Gegenstand der Ausgleichsrechnung, die im nächsten Kapitel angeschnitten wird. Es kann auch mit Polynomen höherer Ordnung approximiert werden. Sehr gute Ergebnisse lassen sich mit approximierenden Splinefunktionen erzielen [19].

Qualitativ gute Ergebnisse lassen sich auch mit etwas Erfahrung durch "von Hand" gezeichneten Kurven erzielen. Diese sind dann quasi mit dem "menschlichen Auge" approximiert.

1.7 Ausgleichsrechnung

Lernziel: Wie werden Meßreihen ausgewertet? Wie wird eine punktförmig aufgenommene Kurve interpretiert? Ausgleich von fehlerbehafteten Meßwertepaaren.

Nehmen wir an, es läge eine Meßreihe mit den Wertepaaren von je einer unabhängigen und einer abhängigen Größe vor, die beide gemessen wurden:

i	1	2	3	4	5	...	n-2	n-1	n
x_i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	...	x _{n-2}	x _{n-1}	x _n
y_i	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	...	y _{n-2}	y _{n-1}	y _n

Tabelle 5: Eine Meßreihe mit jeweils einem gemessenen Meßwertepaar {x_i,y_i}

Eine vorrangige Aufgabe der Ausgleichsrechnung ist es nun, einen mathematischen Zusammenhang zwischen Meßwertepunkten {x_i, y_i, i=1,...,n} wie in Bild 19 aufzufinden [15]. Die Meßwerte sind oft, wie o.a. aufgezeigt, mit Vertrauensbereichen behaftet, so daß eine eindeutige Kurve nicht durch die Punkte gelegt werden kann. Dies trifft i.d.R. insbesondere für die abhängige Größe y zu, während oftmals für die unabhängige Größe x eine fehlerfreie Messung angenommen werden kann. Dann ist eine mathematische Funktion so in die Punkteschar zu legen, daß sich möglichst geringe Abweichungen zwischen den Meßwerten, repräsentiert durch die ermittelten, d.h. gemessenen Werte und den Kurvenwerten ergeben. Es sei \hat{y} der Wert, der sich aus der mathematischen Funktion ergibt und y der Wert aus der Messung. Ziel ist es nun die Abweichungen so klein wie möglich zu gestalten, und zwar betrachtet über alle Meßwertepaare.

Der einfachste Weg wäre die Abweichungen

$$\varepsilon_i = \hat{y} - y \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \tag{76}$$

aufzusummieren und zu fordern, daß die Summe ein Minimum wird. Nachteilig wäre allerdings, daß sich Abweichungen mit unterschiedlichem Vorzeichen gegenseitig aufheben oder zumindest abschwächen, so daß dieser Weg nicht unbedingt zum Ziel führt.

Es werden deshalb die Abweichungen quadriert. Diese sog. **Fehlerquadrate** werden nun aufsummiert und ein Minimum der Summe gefordert:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y} - y)^2 = \text{Minimum} \tag{77}$$

Da die Meßwertepaare feste, also konstante Werte sind, kann die Summe S nur durch Variation der Parameter der mathematischen Funktion minimiert werden. S ist somit als Funktion der Parameter und nicht der Meßwerte zu betrachten. Das Minimum kann durch "Nullsetzen" der partiellen Ableitungen nach den Parametern ermittelt werden. Damit erhalten wir so viel Gleichungen, wie wir zur Bestimmung der unbekannt Parameter benötigen. Dieser Ansatz geht auf GAUSS zurück und wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate genannt.

Ist der mathematische Zusammenhang bekannt, z.B. aufgrund der physikalischen Zusammenhänge, geht es darum die Parameter der mathematischen Funktion zu bestimmen Z.B. wenn der Zusammenhang in der Meßwertefolge folgender Exponentialfunktion

$$\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x} \tag{78}$$

entspräche, dann wären a und b zu bestimmen.

Ist der mathematische Zusammenhang nicht bekannt, ist eine Funktion zu bestimmen, die "möglichst gut" in die Punkteschar paßt und deren Parameter. Unter Umständen ist es hilfreich, die Fehlerquadratsumme S für verschiedene Funktionsansätze zu berechnen, um

damit die am besten geeignete, aus der Menge der betrachteten Funktionen, eben die mit dem kleinsten S , herauszufinden. Häufig werden hierbei Polynome

$$\hat{y}_i(a_m, \dots, a_0) = \sum_{j=0}^m a_j x_i^j = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m \quad (79)$$

benutzt. Es sind natürlich auch andere Funktionen zulässig, wie stückweise definierte Funktionen - beispielsweise Splinefunktionen - oder Exponentialfunktionen wie in Gl.(78). Diese sind dann aber aufwendiger zu berechnen, da sie i.d.R. nicht mehr über lineare Gleichungssysteme gelöst werden können (s. weiter unten).

Betrachten wir die **Polynome** etwas näher. Hierbei ist zu beachten, daß der durch das Polynom errechnete Wert \hat{y}_i nicht identisch sein muß mit y_i . Außerdem ist zu beachten, daß es sich zwar um ein Polynom handelt, aber ein Polynom in x_i , welches aber ein konstanter Wert, eben ein Meßwert ist (s. Tabelle 5). Betrachten wir den Zusammenhang Gl.(79) bezüglich der unbekanntem $m+1$ Parameter $\{a_j, j=0..m\}$, dann ist der funktionale Zusammenhang linear. Variieren wir die Parameter, um einen möglichst kleinen Fehler zu erhalten, dann ist die Schreibweise $\hat{y}_i = \hat{y}_i(a_m, \dots, a_0)$ gerechtfertigt.

Diese Beziehung Gl.(79) muß natürlich für alle $i=1, \dots, n$ Meßwertepaare erfüllt sein. Allen n Gleichungen sind die $m+1$ Parameter a_j gemeinsam und wir erhalten ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \\ \hat{y}_2 &= a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_n &= a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 \end{aligned} \quad (80)$$

oder, etwas deutlicher die lineare Relation hervorhebend, in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{X}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} \quad (81)$$

Wir wollen als Beispiel eine Parabel, d.h. Polynom 2. Grades, durch eine Meßwerteschar legen.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	4	5	7	8	10
y_i	6	6,2	6,7	5,9	5,4	4,4

Tabelle 6: Beispiel einer Meßreihe

Tragen wir diese Meßwerte in ein Diagramm (Bild 20) auf:

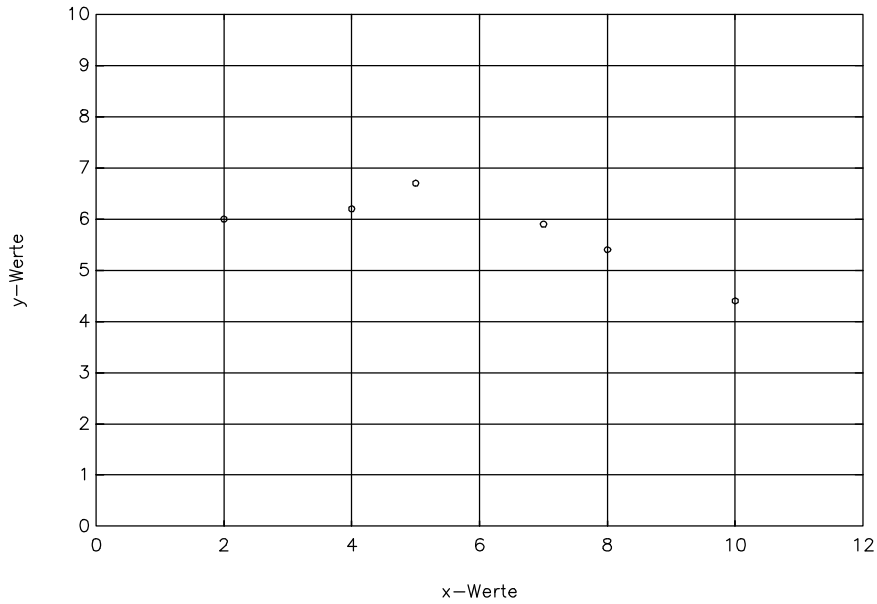


Bild 20: Meßwertepaare aus Beispiel Tabelle 6.

Versuchen wir die Aufgabe anhand der Gl.(81) zu lösen. Dazu lösen wir das Gleichungssystem nach dem gesuchten Parametervektor \underline{a} auf:

$$\underline{a} = \underline{X}^{-1} \underline{\hat{y}}. \tag{82}$$

Nun können verschiedene Fälle betrachtet werden:

1. **$n < m+1$** , d.h. es liegen weniger Meßwertepaare vor, als Parameter zu bestimmen sind. Das Gleichungssystem (81) ist damit unterbestimmt und nicht eindeutig lösbar. Im Beispiel: Beliebige Parabeln erfüllen die Forderung, durch zwei Meßpunkte zu laufen (Bild 21).
2. **$n = m+1$** , d.h. es liegen genau so viele Meßpunkte vor, wie unbekannte Parameter. Das Gleichungssystem Gl.(81) ist exakt lösbar. Im Beispiel: Nur eine Parabel erfüllt diese Gleichung (Bild 22). Anmerkung: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, wenn lineare Abhängigkeiten vorhanden sind, d.h. z.B. zwei Meßpunkte deckungsgleich sind.
3. **$n > m+1$** , d.h. es liegen mehr Meßwertepaare vor, als Parameter zu bestimmen sind. Das Gleichungssystem Gl.(81) ist überbestimmt. Es findet sich i.allg. keine Parabel, die sämtliche Meßpunkte durchläuft, es sei denn, diese liegen exakt auf einer Parabel.

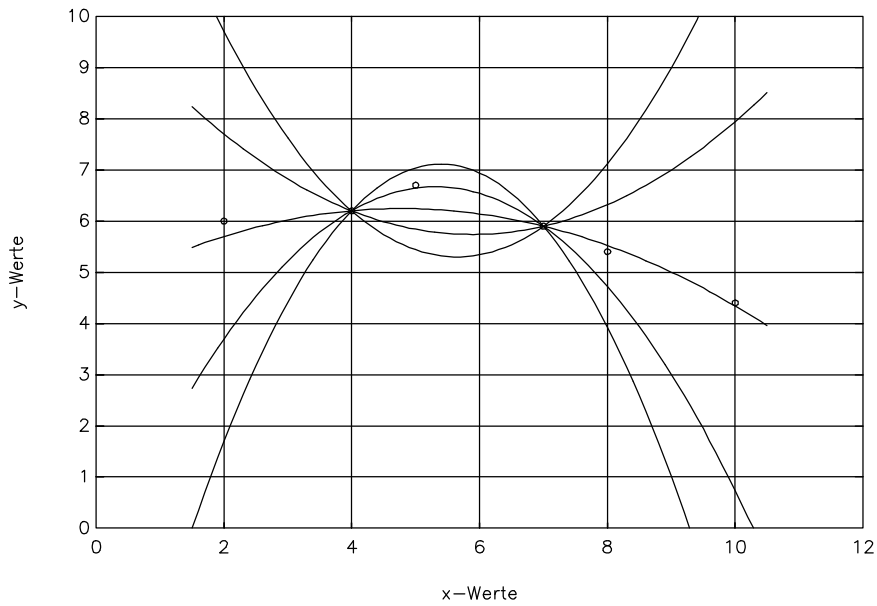


Bild 21: Mehrere Parabeln durch die Meßwertepaare $i=2$ und $i=4$ ($x=4;7$) aus Tabelle 6. Mit zwei Punkten ist das Gleichungssystem unterbestimmt.

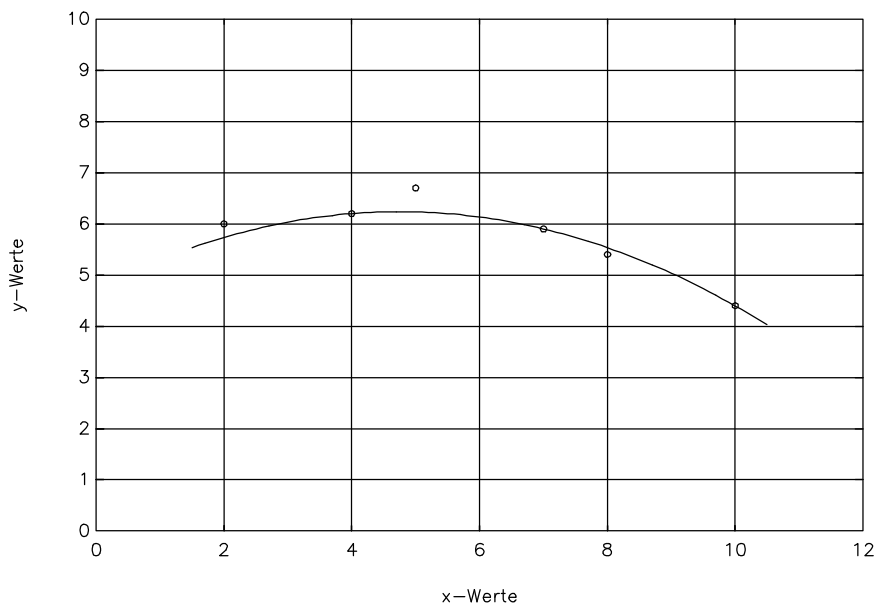


Bild 22: Eine Parabel durch die drei Meßwertepaare $i=2$, $i=4$ und $i=6$ ($x=2;4;6$) aus dem Beispiel Tabelle 6. Nur eine Parabel verläuft durch alle drei Punkte und bildet eine Interpolationskurve.

Für den letzten Fall verwenden wir den Ansatz nach GAUSS (Gl.(77)). Wir berechnen zunächst die Fehler für unser Beispiel mit den Parabeln [20]:

$$\varepsilon_i = \hat{y}_i - y_i = a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{83}$$

Quadrieren wir Gl.(83), dann erhalten wir:

$$\varepsilon_i^2 = a_2^2 x_i^4 + 2a_1 a_2 x_i^3 + x_i^2 (2a_0 a_2 + a_1^2 - 2a_2 y_i) +$$

$$2a_1 x_i(a_0 - y_i) + a_0^2 - 2a_0 y_i + y_i^2 \tag{84}$$

und bilden dann die Fehlerquadratsumme

$$\begin{aligned} S(a_2, a_1, a_0) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = a_2^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + 2a_1 a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \\ &+ (2a_0 a_2 + a_1^2) \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2a_0 a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0^2 \sum_{i=1}^n x_i^0 + \\ &- 2a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - 2a_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2a_0 \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned} \tag{85}$$

Zu beachten ist, daß die Summenausdrücke über die Meßwerte x_i und y_i konstante Zahlenwerte sind, also Faktoren zu den Veränderlichen a_2 , a_1 und a_0 . Jetzt wird Gl.(85) partiell nach den Parametern a_j abgeleitet:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = a_2^2 \sum x_i^2 + a_1^2 \sum x_i^1 + a_0^2 \sum x_i^0 - 2 \sum y_i \tag{86}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = a_2^2 \sum x_i^3 + a_1^2 \sum x_i^2 + a_0^2 \sum x_i^1 - 2 \sum x_i y_i \tag{87}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = a_2^2 \sum x_i^4 + a_1^2 \sum x_i^3 + a_0^2 \sum x_i^2 - 2 \sum x_i^2 y_i \tag{88}$$

Diese drei Gleichungen sind jeweils Null zu setzen und wir erhalten damit ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter a_2 , a_1 und a_0 . In Matrixschreibweise ergibt sich dann:

$$\begin{bmatrix} 2 \sum x_i^2 & 2 \sum x_i^1 & 2 \sum x_i^0 \\ 2 \sum x_i^3 & 2 \sum x_i^2 & 2 \sum x_i^1 \\ 2 \sum x_i^4 & 2 \sum x_i^3 & 2 \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum y_i x_i^0 \\ 2 \sum y_i x_i^1 \\ 2 \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix} \tag{89}$$

Wenden wir Gl.(89) auf unser Beispiel an, erhalten wir für unsere 6 Meßwertepaare ($n=6$, $m=2$) eine Parabel wie in Bild 23.

Ein **lineares Gleichungssystem** für die Bestimmung der Parameter ergibt sich immer dann, wenn die Parameter in einem linearen Zusammenhang in der Ausgleichsfunktion stehen. Stehen die Parameter in einer anderen Relation zu den Meßwerten, beispielsweise

$$\hat{y}_i = f(a, b, c, x_i) = a \cdot e^{bx_i} + c, \tag{90}$$

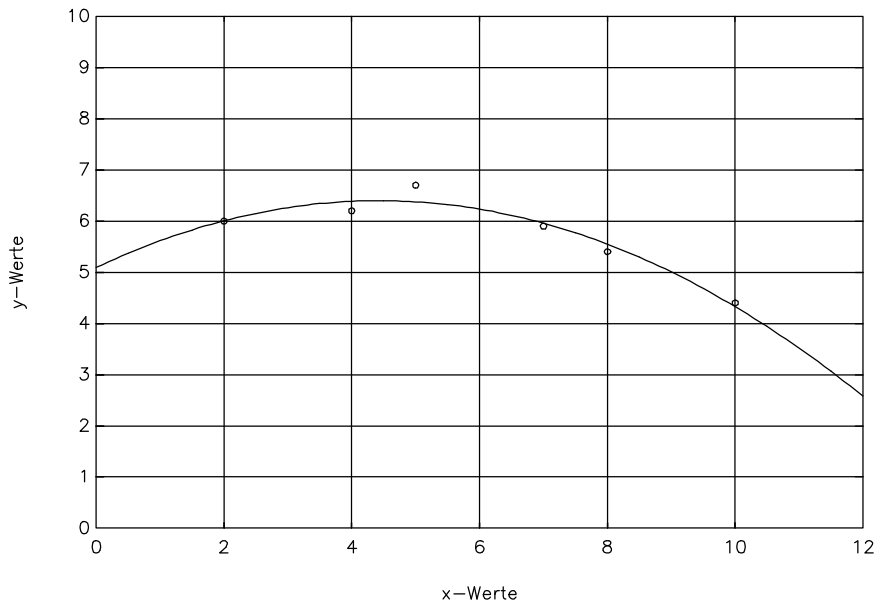


Bild 23: Ausgleichsparabel nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durch alle sechs Meßwertepaare.

dann ergibt sich ein **nichtlineares Gleichungssystem**. Im Beispiel Gl.(90) erhalten wir

$$\varepsilon_j = f(a, b, c, x_j) - y_j \tag{91}$$

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [f_i^2(a, b, c, x_i) - 2f_i(\dots)y_i + y_i^2]. \tag{92}$$

Aus der Forderung, daß Gl.(92) ein Minimum annimmt, erhalten wir wieder durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen die Bestimmungsgleichungen für die Parameter

$$g_a(a, b, c) = \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [2ae^{2bx_i} - 2e^{2bx_i}(y_i - c)] = 0 \tag{93}$$

$$g_b(a, b, c) = \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [2a^2x_i e^{2bx_i} - 2ax_i e^{bx_i}(y_i - c)] = 0 \tag{94}$$

$$g_c(a, b, c) = \frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^n [2ae^{bx_i} - 2y_i + 2c] = 0 \tag{95}$$

Fassen wir die zu bestimmenden Parameter a, b und c der Gl.(90) als Parametervektor

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{96}$$

und die Funktionen g_a , g_b und g_c als Funktionsvektor

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \tag{97}$$

zusammen, erhalten wir das nichtlineare Gleichungssystem

$$\underline{g}(\underline{a}) = 0, \tag{98}$$

das oftmals nicht mehr geschlossen lösbar ist. Zur Lösung bieten sich eine Reihe numerischer Verfahren auf Iterationsbasis an. Von einer Näherung $g(\underline{a}_0)$ ausgehend, werden verbesserte Werte Schritt für Schritt berechnet. Ein bekanntes Verfahren ist die Iterationsvorschrift nach *NEWTON* [19]. Für einfache algebraische Gleichungen, bei denen die Nullstelle a einer Funktion $g(a)$ gesucht wird, lautet das Verfahren

$$\underbrace{a_{j+1}}_{\text{verbesserte Lösung}} = \underbrace{a_j}_{\text{vorhandene Lösung}} - \underbrace{\frac{g(a_j)}{g'(a_j)}}_{\text{Korrektur}} \quad (99)$$

Bei Gleichungssystemen ist nicht nur die Ableitung g' notwendig, sondern die sog. Funktionalmatrix oder Jacobimatrix, die sämtliche Ableitungen aller Funktionen g beinhaltet. Hier im Beispiel lautet sie

$$\underline{Jg} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_a}{\partial a} & \frac{\partial g_a}{\partial b} & \frac{\partial g_a}{\partial c} \\ \frac{\partial g_b}{\partial a} & \frac{\partial g_b}{\partial b} & \frac{\partial g_b}{\partial c} \\ \frac{\partial g_c}{\partial a} & \frac{\partial g_c}{\partial b} & \frac{\partial g_c}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Damit läßt sich das Newton-Verfahren folgendermaßen formulieren [19]:

$$\underline{a}_{j+1} = \underline{a}_j - \underline{Jg}^{-1}(\underline{a}_j) g(\underline{a}_j) \quad (101)$$

Für die Iteration ist die Kehrmatrix der Jacobimatrix (inverse Jacobimatrix) erforderlich. Speziell bei der Ausgleichsrechnung sind diese Matrizen aber oft schlecht konditioniert, d.h. Gl.(101) konvergiert u.U. nicht. Es sind daher auch andere Verfahren anzuwenden und im Einzelfall auf ihre Tauglichkeit zu prüfen [19].

Bei dem Ausgleichen von punktweise aufgenommenen Kurven ergibt sich auch gelegentlich, daß einzelne Meßwerte stärker in die Parameterbestimmung einwirken sollen als andere, z.B. weil sie relevanter für bestimmte Betrachtungen sind oder weil ihr Vertrauensbereich kleiner (enger) ist. Diese Punkte sollen gewissermaßen die Kurve "stärker anziehen". Dies läßt sich durch eine Gewichtung der Fehlerquadrate in den Gln.(85), bzw. (92)(77) berücksichtigen:

$$S = \sum_{i=1}^n [w_i \varepsilon_i^2] \quad (102)$$

Die Gewichte w_i lassen sich zu einer **Gewichtsmatrix** \underline{W} zusammenfassen, bei der aber nur die Hauptdiagonale besetzt ist:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix} \quad (103)$$

Damit läßt sich die Fehlerquadratsumme Gl.(102) als Matrizen-, bzw. Vektorprodukt formulieren:

$$S(\underline{a}, \underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varepsilon}^T(\underline{a}, \underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{W} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{a}, \underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{W} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (104)$$

wobei die einzelnen Werte als Parametervektor \underline{a} , Meßvektoren \underline{x} bzw. \underline{y} und Fehlervektor $\underline{\varepsilon}$ zusammengefaßt sind:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}; \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Zuletzt sei hier noch ein weiterer Sonderfall der Ausgleichsrechnung angesprochen: die **Ausgleichsgerade**. Hierbei wird als Ausgleichsfunktion eine Geradengleichung

$$\hat{y}_j = ax_j + b \quad (106)$$

mit den unbekanntenen Parametern a =Steigung und b =Nullwert angesetzt. Sie ist besonders gut für die Beurteilung von "Trends" (Tendenzen) geeignet, also letztendlich der tendenziellen Zu- bzw. Abnahme der Werte (Steigung!). Dieser Ansatz ist verwandt mit der linearen Regression. Korrelationsanalyse

1.8 Korrelation

Lernziel: Statistisch zusammenhängende Größen, lineare Korrelation, Korrelationsfaktor

1.8.1.1 Beobachtung von zusammenhängenden Meßgrößen

Häufig werden zwei Meßgrößen beobachtet (gemessen), die in einem tendenziellen Zusammenhang stehen, d.h. die zwei Meßgrößen sind voneinander abhängig. Beispiel: Temperatur einer Glühlampe (x) und ausgestrahlte Lichtintensität (y). Die unabhängige Veränderliche kann z.B. die Zeit oder der Ort sein. So ergeben die Beobachtungen zweier abhängiger - in Zusammenhang stehender Größen - x und y einen Verlauf ähnlich Bild 24 links.

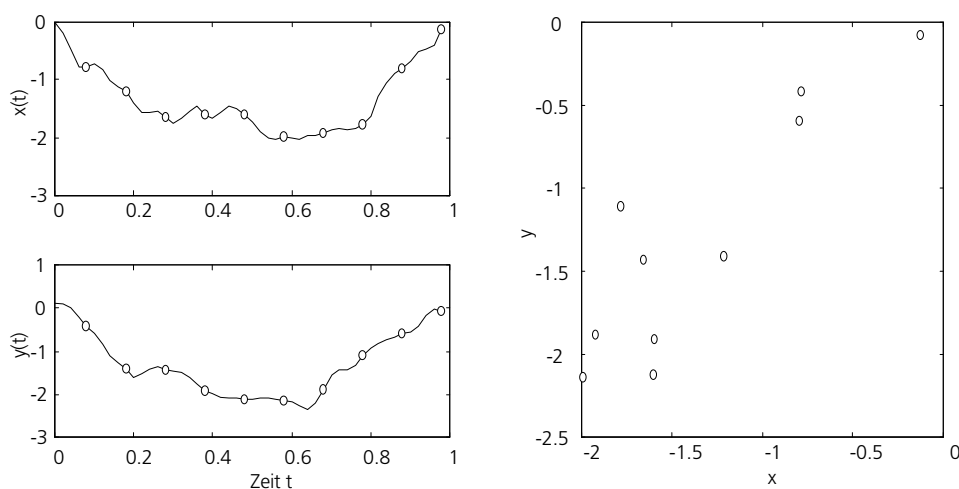


Bild 24: Beispielhafter Verlauf zweier Zeitfunktionen, die in einem Zusammenhang stehen (links) und zeitgleiche Wertepaare gegeneinander aufgetragen (rechts).

Häufig sind die Meßwerte aber mit statistischen Meßfehlern überdeckt, so daß der Zusammenhang nicht ohne weiteres erkennbar wird. Denn würden die Meßwerte (zeitgleich) paarweise aufgetragen - also die Zeit wird eliminiert -, dann müßte sich der funktionale Zusammenhang zwischen den Meßgrößen x und y abzeichnen. Durch die Meßfehler ist das aber nicht unbedingt ersichtlich (Bild 24 rechts). Es besteht aber möglicherweise eine "statistische Verwandtschaft".

1.8.1.2 Lineare Korrelation

Die funktionalen Zusammenhänge zweier Meßgrößen sind häufig linearer Natur. Wären keine Meßfehler vorhanden, dann müßten alle Meßwerte $y=y(x)$ auf einer Geraden liegen, d.h. die "Punktwolke" in Bild 24 rechts wäre langgestreckt auf einer Geraden.

Bedingt durch die statistisch verteilten Meßfehler läßt sich aber keine Gerade finden, die durch alle Meßwertepaare (Bild 24 rechts) läuft. Mit den Verfahren der Ausgleichsrechnung (s.dort) läßt sich aber eine Gerade bestimmen, deren Abweichung im Sinne der Gauß'schen Fehlerquadrate minimiert ist.

Zunächst wird angenommen, y sei eine Funktion von x ($y=y(x)$). Wie bei der Ausgleichsrechnung vorgestellt, bedeutet diese Annahme auch, daß x als fehlerfrei und y als fehlerbehaftet gemessen vorausgesetzt sei. Dann liegen die erwähnten Abweichungen vertikal zwischen der Geraden und den Meßpunkten. Die Ausgleichsrechnung liefert eine Geradengleichung

$$y = y(x) = a \cdot x + b \quad (107)$$

mit den Abweichungen (Fehlern) zu den gemessenen Werten der n Meßpunkte $\{x_i, y_i\}$ von

$$\varepsilon_j = y(x_j) - y_j. \quad (108)$$

Die Annahme, daß nur y fehlerbehaftet gemessen wurde, ist jedoch nicht richtig. Es sind ja beide beobachtete Größen gleichwertig und fehlerhaftet.

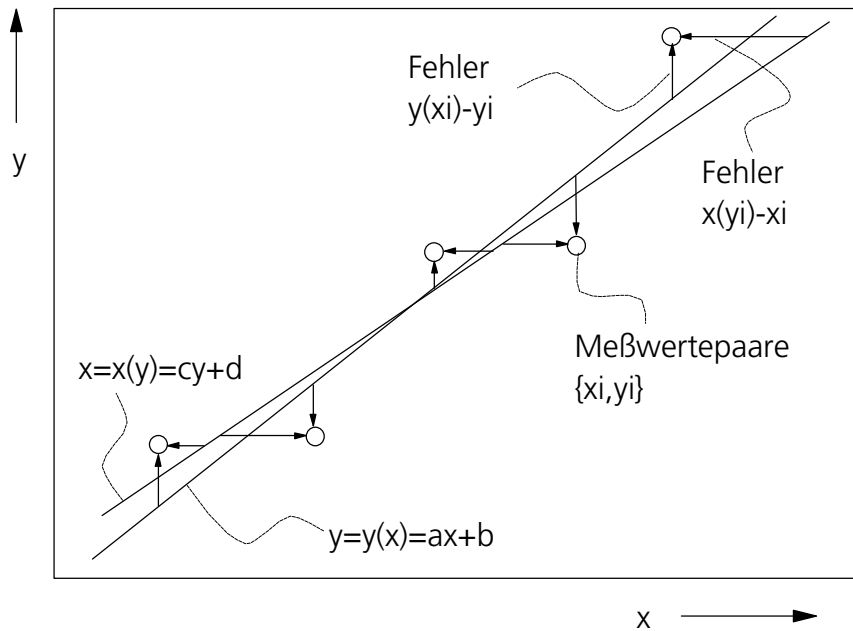


Bild 25: Ausgleichsgeraden durch Meßpunkte: a) $y=ax+b$ b) $x=cy+d$

Mit der gleichen Berechtigung kann daher auch x als fehlerbehaftet und y als fehlerfrei gemessen angenommen werden. Mit den Methoden der Ausgleichsrechnung bestimmen wir analog die Geradengleichung

$$x = x(y) = c \cdot y + d \tag{109}$$

mit den Fehlern zu den Meßpunkten $\{x_i, y_i\}$

$$\delta_j = x(y_j) - x_j \tag{110}$$

Gl.(109) läßt sich auch als Funktion y von x darstellen. Wir formen nach y um und erhalten für die zweite Gerade

$$y(x) = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c} \tag{111}$$

Die beiden Geradengleichungen lassen sich in ein x - y -Diagramm eintragen (Bild 25) und sind i.d.R. nicht identisch, da ja unterschiedliche Fehler in die Bestimmungsgleichungen einfließen. Die beiden Geraden nach Gln.(107)(109) bilden eine "Schere".

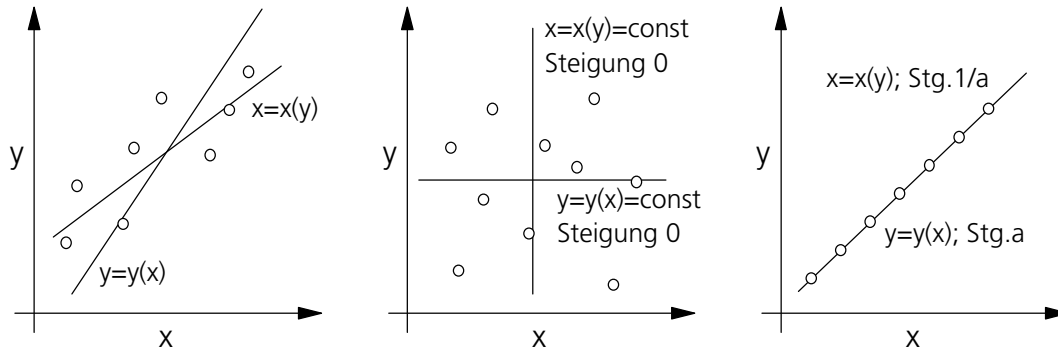


Bild 26: Drei unterschiedliche "Scheren" der Korrelationsanalyse.
 Links: leichte statistische Abhängigkeit
 Mitte: Vollkommene Unabhängigkeit
 Rechts: Streng funktionaler (linearer) Zusammenhang

Es ist leicht einzusehen, daß bei vollkommener Abhängigkeit, d.h. funktionaler linearer Zusammenhang und keine unterschiedlichen statistischen Einflüsse auf x und y, bei Geraden ineinander übergehen - die Schere klappt zu - d.h. für die Geradensteigungen gilt $c=1/a$ (Bild 26 rechts). Dagegen wird bei vollkommener statistischer Unabhängigkeit die Schere aufgehen, bis die Geraden senkrecht zueinander stehen (Bild 26 mitte). Bei statistischer Abhängigkeit der Meßwertepaare (linearer Zusammenhang und überlagerte statistisch unabhängige Fehler) bildet sich eine mäßig aufklaffende Schere (Bild 26 links).

Für die Steigungen der Geraden ergeben sich aus der Ausgleichsrechnung (Gl.(79), $m=0$) für $y=y(x)$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \tag{112}$$

bzw. für $x=x(y)$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2} \tag{113}$$

Fallen beide Geraden aufeinander, dann müssen die Steigungen in Gl.(107) und Gl.(111) identisch sein, d.h. es muß gelten

$$a = \frac{1}{c} \Rightarrow ac = 1 \tag{114}$$

Ist der Wert ungleich eins, dann klaffen die Geraden auseinander. Setzen wir Gl.(112) und Gl.(113) in Gl.(114) ein und definieren den linearen Korrelationskoeffizienten r mit $r = \sqrt{ac}$, dann ergibt sich

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}} \quad (115)$$

Er kann nur Werte von $r \in [-1, 1]$ annehmen und dient als Maß für die lineare Abhängigkeit zwischen x und y [2]. Ohne radizieren wäre r stets positiv, was die Aussagefähigkeit einschränken würde.

Bei strengem linearem Zusammenhang von x und y liegen die gemessenen Wertepaare $\{x_i, y_i\}$ auf einer Geraden. Bei positiver Steigung dieser Geraden ist $r=+1$, bei negativer Steigung ist $r=-1$. Sind x und y vollkommen statistisch unabhängig gilt $r=0$.

Wir können uns auch einen weiteren Zugang zum Korrelationskoeffizienten schaffen [22]. Zentrieren wir zunächst unsere Meßwertepaare um deren Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{bzw.} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (116)$$

dann bekommen wir neue Meßwertepaare

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad \text{bzw.} \quad w_i = y_i - \bar{y}. \quad (117)$$

Bilden wir nun die sogenannte Kovarianz

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i, \quad (118)$$

dann weist C einen großen positiven Wert auf, wenn die v_i und w_i gemeinsam das gleiche Vorzeichen aufweisen, da die Summanden stets als Produkt $v_i \cdot w_i$ positiv ist. Ist das Vorzeichen dagegen paarweise stets verschieden, weist C einen großen negativen Wert auf. Besteht kein statistischer Zusammenhang zwischen v_i und w_i , dann verschwindet der Wert von C . Um ein definierten Maximalwert von C zu erhalten, normieren wir Gl.(118) und erhalten wiederum einen Ausdruck für den linearen Korrelationskoeffizienten:

$$r = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 \sum_{i=1}^n w_i^2}} \quad (119)$$

Setzen wir für v_i und w_i wieder die ursprünglichen Ausdrücke aus Gln.(116)..(117) wieder ein, dann erhalten wir wiederum Gl.(115).

Anmerkung [2]: Der nach Gl.(115) berechnete lineare Korrelationskoeffizient r ist das Resultat einer endlichen Menge n von Meßwerten (Stichprobe) und stellt einen Schätzwert für den Erwartungswert von ρ - des Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit - dar.

1.8.1 Kenngrößen stochastischer Signale

Lernziel: Häufkeiten von Signalwerten, Verteilungsfunktion, zeitliche Korrelation, Autokorrelation, Kreuzkorrelation

1.8.1.1 Amplitudendichte und -verteilung

Betrachten wir einen zeitlichen Signalverlauf eines deterministischen (=mathematisch funktional bestimmten) Signals von beispielsweise Sinusform (Bild 27 rechts), also $y(t)=\sin(\omega t)$. Während des zeitlichen Verlaufs innerhalb eines Beobachtungsintervalls $t \in [-T_1, T_2]$, wobei idealerweise, aber nicht praktikabel, $T_1 \rightarrow -\infty$ und $T_2 \rightarrow +\infty$ ist, läßt sich eine Häufigkeit des Signalwertes ermitteln die wir Verteilungsfunktion $F(x)$ nennen wollen. Wir bilden Gl.(120)

$$F(x) = \frac{T_x(x)}{T_2 - T_1} \tag{120}$$

$$F(x) = P(y(t) \leq x) \tag{121}$$

wobei x eine Schranke für den Amplitudenwert des Signals (=Signalwert) $y(t)$ darstellt und

$$T_x(x) = \sum T_{x_i}(x) \tag{122}$$

die Summe aller Intervalle T_{x_i} ist und innerhalb dieser Intervalle $y(t) \leq x$ gilt. Gl.(121) drückt den gleichen Zusammenhang aus und ist in der Schreibweise der Zufallsvariablen geschrieben, wobei $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit P , oder ersatzweise die relative Häufigkeit, des Ereignisses A bedeutet [22].

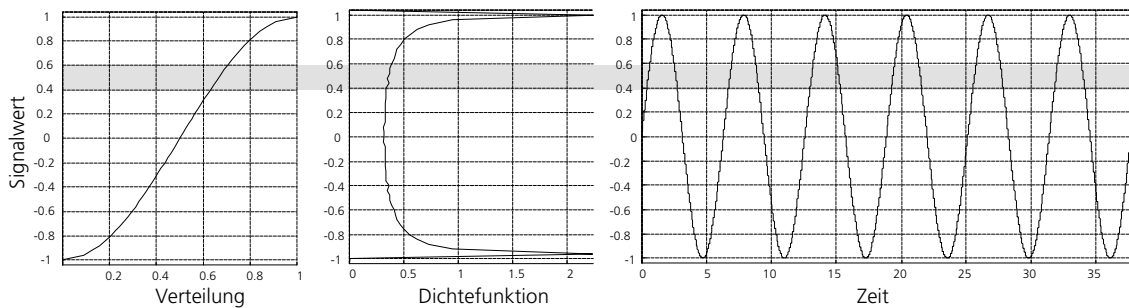


Bild 27: Amplitudenverteilungsfunktion, Amplitudendichte und Zeitfunktion eines Ausschnittes eines Sinussignals

In unserem Beispiel nach Bild 27 sehen wir leicht, daß gelten muß (Bild 27 links):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < -1 \\ +0,5 & \forall x = 0 \\ +1 & \forall x > +1 \end{cases} \tag{123}$$

Differenzieren wir $F(x)$ nach x , dann erhalten wir die Amplitudendichtefunktion:

$$h(x) = \frac{df(x)}{dx} \tag{124}$$

Wie bei anderen Dichtefunktionen beschreibt die Fläche unter $h(x)$ zwischen x_1 und $x_2 > x_1$ die Wahrscheinlichkeit P (oder ersatzweise relative Häufigkeit), mit der $y(t)$ Signalwerte im

Intervall $x \in [x_1, x_2]$ annimmt. Aufgrund von Gl.(124) können wir durch umformen P in Form eines bestimmten Integrals schreiben:

$$P(y(t) \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \tag{125}$$

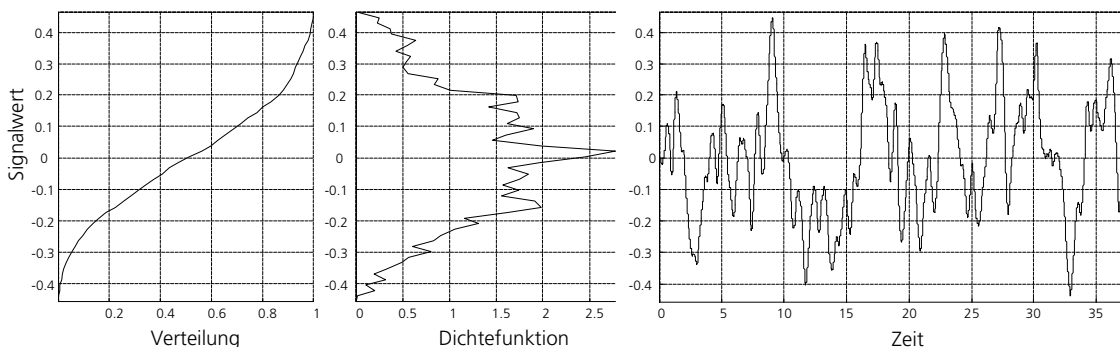


Bild 28: Amplitudenverteilungsfunktion, Amplitudendichte und Zeitfunktion eines stochastischen Prozesses mit näherungsweise Gauß'scher Amplitudendichte

In Bild 27 ist das Intervall $x \in [x_1, x_2]$ mit $x_1 = 0,4$ und $x_2 = 0,6$ dunkel hinterlegt. Aus der Verteilungsfunktion $F(x)$ können wir ablesen, daß die Sinusfunktion $y(t)$ mit einer relativen Häufigkeit von $F(0,6) - F(0,4) \approx 0,7 - 0,62 = 0,08 = 8\%$ Werte aus diesem Intervall annimmt.

Die Verteilungs- und Dichtefunktion ist nicht nur auf deterministische Signale beschränkt, sondern kann auch auf regellose Signalverläufe, sog. stochastische Prozesse, angewendet werden. So zeigt Bild 28 einen stochastischen Prozeß (regellose Zeitfunktion) mit näherungsweise Gauß'scher Amplitudendichte. Bild 29 zeigt ebenfalls einen stochastischen Prozeß, aber mit rechteckförmiger Dichte und höherfrequenten Signalanteilen. Über die Frequenzanteile des Signals sagen Amplitudendichte und Verteilungsfunktion nichts aus.

Anmerkung: Die hier vorgestellten Beziehungen - insbesondere Gl.(120) - geht von einer zeitlichen Betrachtung aus. In der originären Definition werden stochastische Prozeßgrößen aber aus Erwartungswerten gebildet, d.h. zu jedem Zeitpunkt werden aus n (idealerweise $n \rightarrow \infty$) Einzelvorgänge ein Ensemblewert für Dichte und Verteilung bestimmt. In der Praxis ist dies aber i.d.R. nicht machbar. Hier ersetzen wir die Erwartungswerte durch Zeitmittelwerte. Dies ist zulässig, wenn sich die Kenngrößen des Prozesses über der Zeit nicht ändern, also ein stationärer stochastischer Prozeß vorliegt. Wir nennen einen Prozeß ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte durch die Ensembleerwartungswerte ersetzt werden dürfen. In der Meßtechnik setzen wir daher i.d.R. Ergodizität bei stochastischen Signalen voraus. Eine weitere, in der Praxis begründeten, Voraussetzung liegt in dem endlichen Betrachtungsintervall $t \in [T_1, T_2]$, so daß sich nur Näherungswerte (Schätzwerte) ergeben. Dies ist insbesondere auch in Bild 27..Bild 29 bei den "unruhigen" Verläufen der Amplitudenverteilung und -dichte zu sehen.

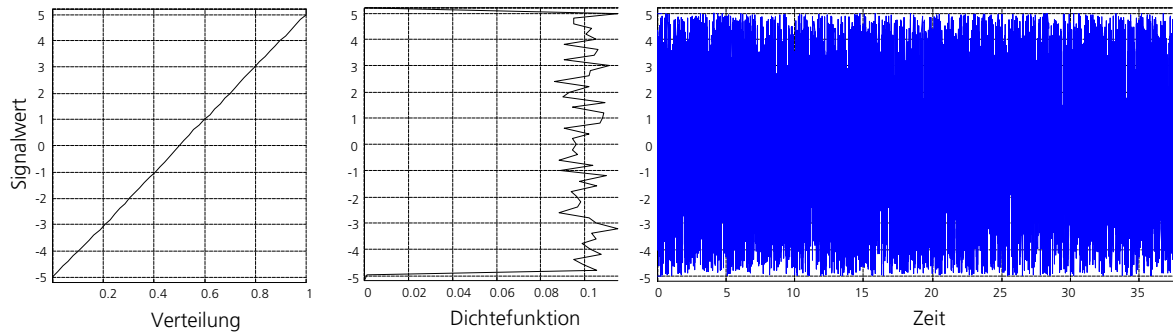


Bild 29: Amplitudenverteilungsfunktion, Amplitudendichte und Zeitfunktion eines stochastischen Prozesses mit näherungsweise rechteckförmiger Amplitudendichte

Bei ergodischen stochastischen Prozessen können wir beispielsweise aus dem zeitlich begrenzt beobachteten Signal den Mittelwert berechnen. Als Ensemblewert (statistischer Mittelwert, statistisches Moment) m_y und über Zeitmittelwerte \bar{y}

$$\left. \begin{aligned} m_y = E(y(t)) &\approx \int_{T_1}^{T_2} y \cdot h(y) dy \\ \bar{y}(t) &\approx \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} y(t) dt \end{aligned} \right\} \forall t \in [T_1, T_2] \quad (126)$$

erhalten wir vergleichbare Werte, deren Qualität über die Beobachtungszeitdauer bestimmt wird.

Beispiel eines nicht ergodischen Prozesses: Elektronisches Flip-Flop mit den logischen Ausgangszuständen 0 (=0V) und 1 (=5V) dessen Zustände 0 oder 1 beim Einschalten regellos mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten kann. Nach dem Einschalten bleibt der Wert konstant. Bilden wir den statistischen Mittelwert aus N Versuchen (N sehr groß), dann erhalten wir für den statistischen Mittelwert der Ausgangsspannung ca. 2,5V. Als Zeitmittelwert ergäbe sich, je nach Anfangszustand, entweder 0V oder 5V.

1.8.1.2 Autokorrelation

Im letzten Kapitel haben wir stochastische Signale (Prozesse) ohne den Einfluß der Zeit betrachtet. So fanden wir beispielsweise keinen Einfluß der Änderungsgeschwindigkeit eines Signals (Frequenzanteile, Bandbreite) in der Amplitudenverteilung oder Amplitudendichte. Aber ähnlich dem Zusammenhang zweier zeitbereinigter Größen x und y, der über den Korrelationskoeffizienten beschrieben wird, können wir einen inneren Zusammenhang in einem Signal definieren.

Nehmen wir statt der Meßwertepaare $\{x_i, y_j\}$ Werte aus ein und dem selben Signal aber um τ zeitversetzt (Bild 30), dann läßt sich ebenfalls ein Korrelationkoeffizient herleiten, der aber von der Verschiebung - dem Zeitversatz - τ abhängt [22]:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \tag{127}$$

dann bedeutet dies, daß bei einem statistischen Zusammenhang der Integrand stets - oder zumindest überwiegend - positiv ist und damit das Integral einen Wert liefert. Liegt kein statistischer Zusammenhang vor, wird das Integral den Wert 0 liefern. Diese Beziehung wird Autokorrelationsfunktion - kurz AKF - genannt, da sie die Korrelation eines Signals x mit sich selbst kennzeichnet. Der Signalbezug wird im Index als "xx" markiert. Anmerkung: Gl.(127) fußt wieder auf der Basis eines Zeitmittelwertes. Die Autokorrelation läßt sich auch über Ensemblemittelwerte herleiten, besitzt in dieser Form aber keine praktische Bedeutung [22].

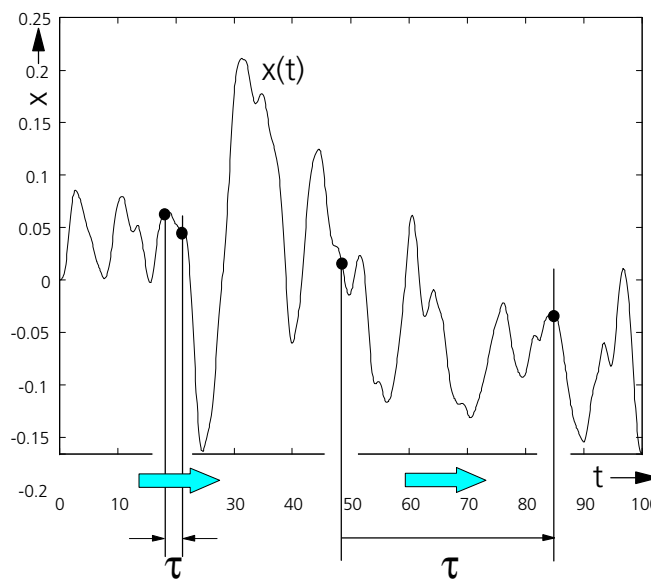


Bild 30: Regelloses Signal x(t) mit zwei Beobachtungsfenster unterschiedlicher Breite τ .

Die Eigenschaften sind leicht einzusehen. Bei einem regellosen Vorgang wird auf jeden Fall für $\tau=0$, d.h. identische Abgriffe, ein strenger innerer Zusammenhang bestehen und R_{xx} wird größer 0 sein. Je weiter die Abgriffe auseinander liegen - also τ größer wird - desto mehr wird der innere Zusammenhang verloren gehen. Dies geschieht um so schneller, je schneller die Änderungen im Signal erfolgen, also je höher die Frequenzanteile im Signal sind.

In der Praxis ist das Beobachtungsintervall $2T$ natürlich endlich, weshalb sich aus Gl.(127) Bild 30 durch ein endliches T nur ein Schätzwert der AKF R_{xx} ergibt:

$$\tilde{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\xi) \cdot x(\xi + \tau) d\xi \tag{128}$$

Der Schätzwert wird um so besser, je länger das Beobachtungsintervall T ist.

Die AKF besitzt u.a. folgende Eigenschaften:

1. Die AKF ist eine gerade Funktion, d.h. es gilt $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$
2. Das Maximum der AKF liegt bei $\tau=0$: $R_{xx}(0) \geq R_{xx}(\tau)$

3. Der Betrag der AKF ist niemals größer als die mittlere Signalleistung:

$$R_{XX}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \geq |R_{XX}(\tau)|$$
4. Mittelwertfreie Signale $x(t)$ liefern: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$
5. Periodische Signale liefern AKFs gleicher Periodizität

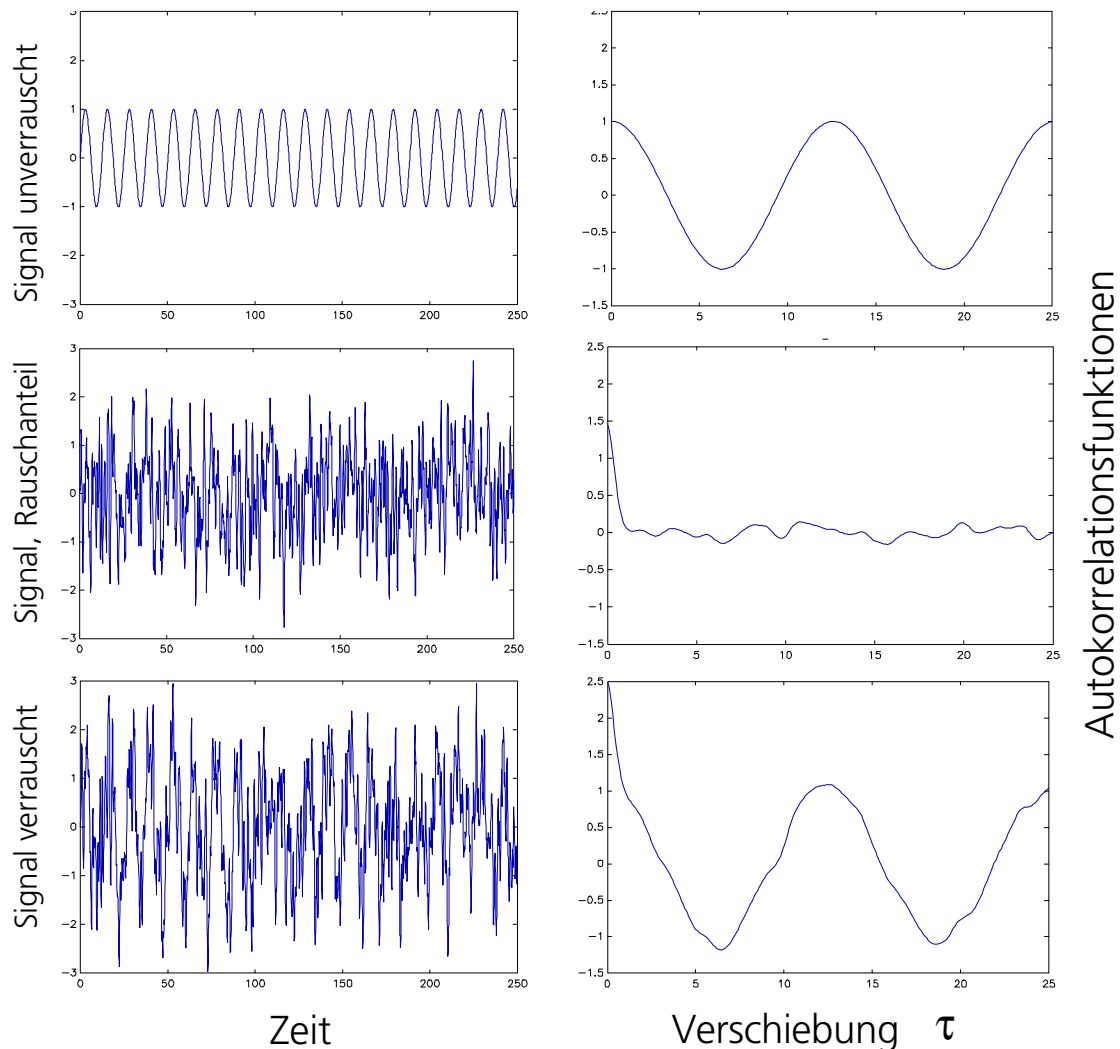


Bild 31: Signalverläufe (links) und Autokorrelationsfunktionen (rechts) von einer Sinusschwingung (oben), stochastischer Prozeß "Rauschen" (mitte) und der Superposition aus beiden (unten)

In Bild 31 sind die Eigenschaften anhand eines Beispiels zu sehen. Oben besteht das Signal x zunächst nur aus einem reinen Sinusverlauf. Die Periodizität findet sich in der AKF wieder. Das Maximum ist bei $\tau=0$. Dagegen nimmt die AKF des Rauschsignals rasch ab, aber auch hier liegt das Maximum bei $\tau=0$. Für große Verschiebungen verschwindet der Wert der AKF. Unten ist die Überlagerung (Summe) aus Rauschsignal und Sinus dargestellt. Die Sinusfunktion ist im Zeitverlauf kaum zu erkennen - sie geht quasi im Rauschen "unter". Die AKF legt allerdings die Periodizität wieder frei.

Die Signalform des periodischen Signals wird allerdings nicht wiedergegeben, da die AKF über das Integral eines Signalproduktes definiert ist. So liefert ein Rechtecksignal (Bild 32)

ganz gemäß der Integration Dreiecksverläufe in der AKF, allerdings mit entsprechender Periode. Auch hier kann das Nutzsignal aus dem Rauschen mittels der AKF "herausgefischt" werden.

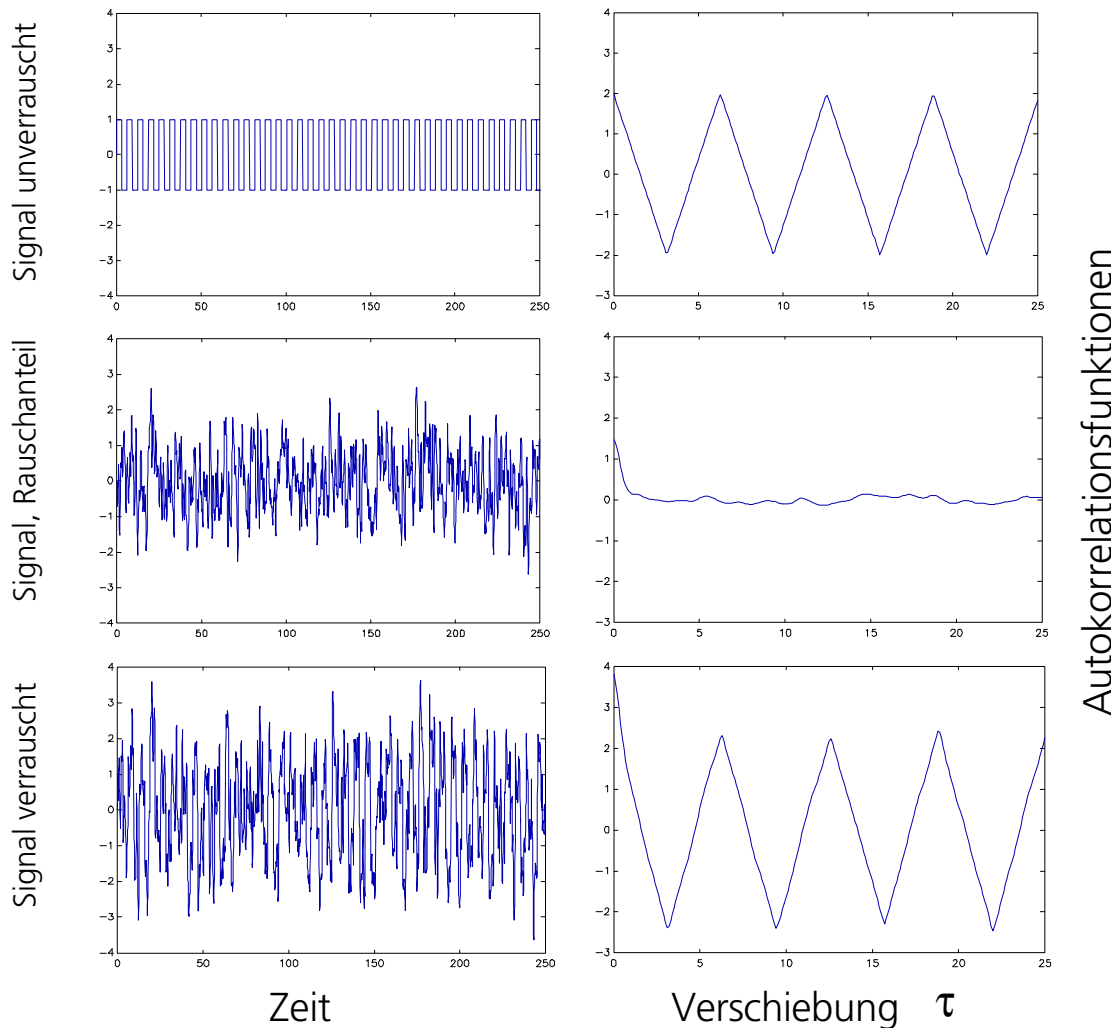


Bild 32: Signalverläufe (links) und Autokorrelationsfunktionen (rechts) von einer Rechteckfunktion (oben), stochastischer Prozeß "Rauschen" (mitte) und der Superposition aus beiden (unten)

Anhand der Beispiele liegen die Anwendungen bereits offen. Die Autokorrelation kann überall dort eingesetzt werden, wo schwache Nutzsignale von starkem Rauschen (stochastische Signale ohne statistischem Zusammenhang zum Nutzsignal) überlagert sind. So können z.B. Laufgeräusche von Getrieben, Schallsignale (Echos), elektrische Signale mit thermischem Rauschen, usw. analysiert werden.

1.8.1.3 Kreuzkorrelation

Bei der Kreuzkorrelation wird der innere Zusammenhang zweier Signale untersucht. Sie ähnelt der Autokorrelation, bietet aber andere Anwendungsmöglichkeiten. So könnte z.B. das eine Signal der Eingang $u(t)$ eines Übertragungssystem sein und das andere dessen Ausgang $y(t)$ (Bild 33).

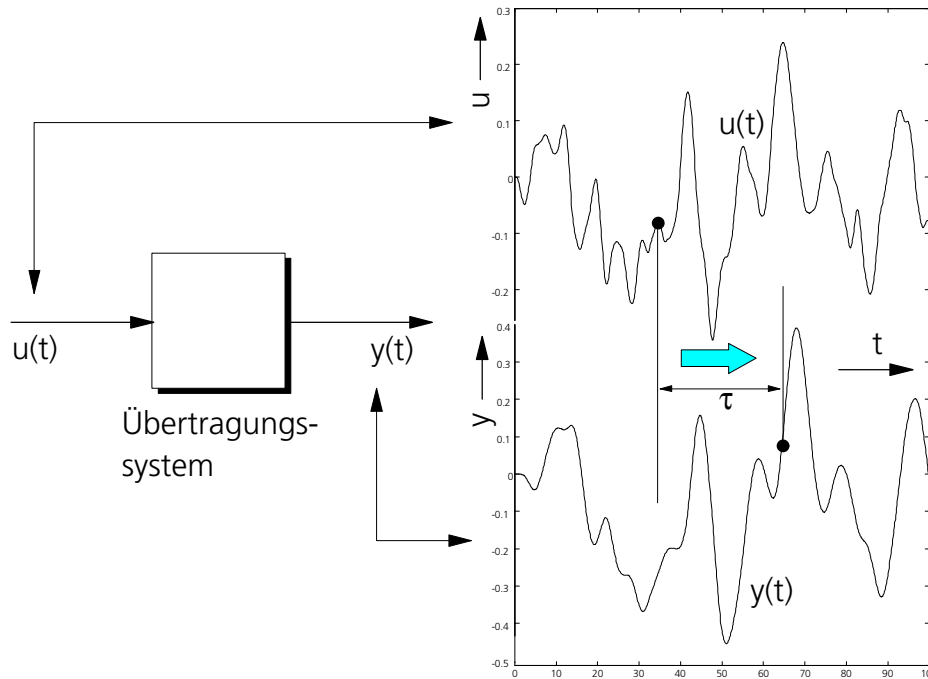


Bild 33: Kreuzkorrelation zwischen zwei Signalen $u(t)$ und $y(t)$, z.B. bei Ein-/Ausgangs-Übertragungssystemen.

Analog zu der Gl.(127) erhalten wir die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zwischen dem Signal u und dem Signal y :

$$R_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot y(t + \tau) dt \tag{129}$$

bzw. deren Schätzwert

$$\bar{R}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\xi) \cdot y(\xi + \tau) d\xi \tag{130}$$

Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion:

1. I.a. keine gerade Funktion, sie erfüllt aber $R_{uy}(-\tau) = R_{yu}(\tau)$
2. Das Maximum liegt nicht notwendigerweise bei $\tau=0$
3. Wie bei der AKF gilt bei mittelwertfreien Signalen $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{uy}(\tau) = 0$ (es genügt aber die Mittelwertfreiheit eines Signals)

Die Kreuzkorrelation findet u.a. folgende Anwendungen:

- Analyse von Übertragungssysteme durch gezielte Anregung mit Rauschsignalen
- Laufzeit-/Entfernungsmessungen (Echolot) mit aktiven Rauschsignalen
- Laufzeitmessung mit zwei Meßgrößen [2], z.B. bei der Durchflußmessung, Transportgeschwindigkeit von Bändern oder Radiowellen

- Oberflächenanalysen
- Geräuschortung (Getriebe, etc.)

Die Korrelationsfunktionen AKF und KKF werden heute oft mittels eines modifizierten FFT (=Fast Fourier Transformation) - Algorithmusses berechnet [21].

1.9 Meßprinzipien und Strukturen

Lernziel: Wie können Meßverfahren klassifiziert und strukturiert werden? Welche Vor- und Nachteile haben die unterschiedlichen Strukturen?

Meßgeräte und deren Prinzip können nach verschiedenen Kriterien strukturiert werden, wie beispielsweise Anwendung, gerätetechnischer Aufbau, erreichbare Güteklassen, Struktur, usw.

Für das Verständnis eines Meßgerätes bezüglich seines Meßprinzips ist die Struktur des Meßgerätes am aussagekräftigsten. Im wesentlichen werden drei Kategorien unterteilt: die Kettenstruktur, die Parallelstruktur und die Kreisstruktur.

Die Meßeinrichtung oder das Meßgerät wird dabei in **Funktionsblöcke** unterteilt, die über Signalpfade miteinander verbunden sind. Die Pfade zeigen also Signalflüsse auf, die durch unterschiedliche physikalische Größen, wie elektrische Größen (Spannung, Strom, Leistung,...), mechanische Größen (Kraft, Druck, Weg, Geschwindigkeit,...), lichttechnische Größen (Beleuchtungsstärke,...), usw. realisiert sein können. Die Funktionsblöcke sind quasi in sich abgeschlossen und verfügen i.d.R. über einen Signaleingang und einen Signalausgang. Sie formen die Signale in andere physikalische Größen um, verändern die Werte mittels einer Funktion (Kennlinie, siehe Bild 5), mit dem Sonderfall der linearen Übertragung (Übertragungsfaktor) und beschreiben das dynamische Verhalten. Zusätzlich gibt es für die Signale Summationsstellen. Wie der Funktionsblock auf das Signal wirkt, wird durch eine zusätzliche Information mit angegeben, so werden beispielsweise bei linearen Übertragungsgliedern (-blöcken) die Übertragungsfaktoren (Steigung der Kennlinie) mit angegeben, z.B. k_1 , a , a_{4711} , 5. Die Übertragungsfaktoren werden normalerweise ohne Vorzeichen angegeben. Dieses wird an der Summationsstelle berücksichtigt (vgl. Bild 35). Dynamische Kennwerte, wie Zeitkonstanten, werden neben die Funktionsblöcke geschrieben. Der Funktionsblock selbst trägt dann ein Symbol für seine dynamisches Verhalten (Sprung- oder Impulsantwort) oder eine mathematische Angabe, z.B. in Form der **Laplace-Transformierten (Übertragungsfunktion)**. Näheres hierzu wird in der Systemtheorie, bzw. Regelungstechnik behandelt. Mitunter werden auch nur beschreibende Angaben, wie Namen, in das Strukturbild aufgenommen.

Die nachfolgend gezeigten Strukturen sind i.d.R. nicht jeweils als alleinige Struktur in einem Meßsystem vertreten. Die Funktionsblöcke der Struktur selbst lassen sich nahezu beliebig weiter in Funktionsblöcke, möglicherweise anderer Struktur, zerlegen. Wie "tief" die Zerlegung (Verfeinerung) vorgenommen wird, hängt vom jeweiligen Ziel der Betrachtung ab. Wichtig sind die dominanten Strukturen (grobes Strukturbild). Diese sind dann weiter in Teilstrukturen zerlegbar.

Andererseits lassen sich auch Verfeinerungen wieder zu größeren Funktionsblöcken, ggf. unter Vernachlässigungen, wie beispielweise dem dynamischen Verhalten, zusammenfassen. In wie weit die Vernachlässigungen zulässig sind, hängt wiederum vom Ziel der Betrachtung ab.

Die Strukturbilder sind somit keine Schaltbilder, sondern zeigen gezielt das Prinzip (Wirkungsablauf) eines Systems.

1.9.1 Kettenstruktur

Bei der Ketten- oder **Reihenstruktur** sind die Übertragungsglieder (Funktionsblöcke) hintereinander angeordnet und zwar derart, daß der Signalausgang eines Funktionsblockes den Signaleingang des nächsten Funktionsblockes bildet. Diese Struktur kommt, als dominante Struktur oder als Teilstruktur, in Meßgeräten/-systemen sehr häufig vor.

Bild 34 zeigt ein Beispiel mit linearen Übertragungsgliedern. Diese Glieder könnten zum Beispiel Komponenten einer elektrischen Wegmessung sein: 1. potentiometrischer Wegaufnehmer; 2. Meßverstärker; 3. Drehspulmeßwerk. Der gesamte, zusammengefaßte Übertragungsfaktor wäre dann

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n \tag{131}$$

Hier im Beispiel ist auch der Wechsel der physikalischen Beschaffenheit der Signalgrößen zu sehen: Weg, elektrische Spannung, elektrische Spannung (aus dem Verstärker) und Drehwinkel des Zeigers.

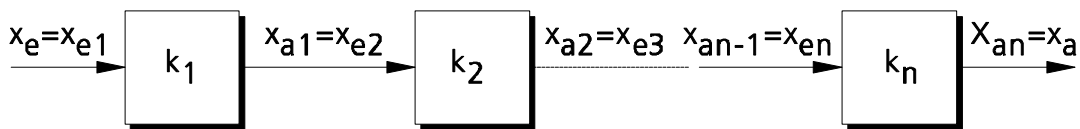


Bild 34: Beispiel einer Kettenstruktur

Es ist in diesem Beispiel auch deutlich zu sehen, daß sich die Strukturen der einzelnen Funktionsblöcke weiter verfeinern lassen. Das Potentiometer wäre beispielsweise weiter zerlegbar in einen Funktionsblock der zunächst den Weg in einen elektrischen Widerstand umformt und dann, der nächste Funktionsblock, der den Widerstand (Signalgröße!) mittels eines konstanten, elektrischen Stromes, in eine Spannung umformt. Ebenso sind auch der Verstärker und das Drehspulmeßwerk weiter zerlegbar.

1.9.2 Parallelstruktur

In der Meßtechnik werden Parallelstrukturen sehr häufig verwendet, wenn eine Meßgröße mit einer Referenzgröße verglichen wird. Für das Beispiel nach Bild 35 sind dies die beiden parallelen Funktionsblöcke k_1 und k_2 . Das gesamte Übertragungsverhalten wird gebildet durch

$$x_a = x_{a1} - x_{a2} = k_1 \cdot x_{e1} - k_2 \cdot x_{e2} \tag{132}$$

Das Minuszeichen resultiert aus der "Summationsstelle", wo das Signal x_a aus $x_{a1} - x_{a2}$ gebildet wird.

Normalerweise werden bei Meßgeräten mit Parallelstrukturen Differenzen gebildet. Dabei wird, da daß Ausgangssignal x_a als Differenz resultiert, ein Abgleich vorgenommen, d.h. zu der unbekanntem Meßgröße x_{e1} wird eine Referenzgröße x_{e2} parallel gleichartig gemessen und beide Ergebnisse werden verglichen. Durch den Abgleich, der entweder in dem einen oder anderen Pfad vorgenommen werden kann, wird die Differenz auf Null eingestellt.

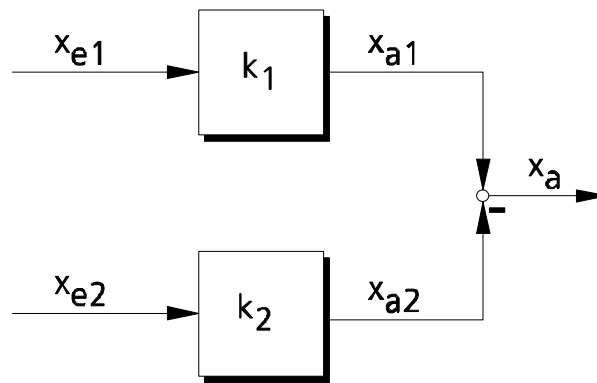


Bild 35: Beispiel einer Parallelstruktur

Diese Vorgehensweise hat Vorteile: 1. können Änderungen in x_{e1} besser erfaßt werden, da sie um den Referenzwert erfolgen, d.h. der Meßbereich kann lokal um den Referenzwert gelegt werden. 2. Störeinflüsse auf die Messung, wie z.B. Temperatureinflüsse, Umgebungsdruck, Störstrahlung, usw. werden stark vermindert, da sie, bei korrekter Anwendung des Prinzips, auf beide Pfade gleich einwirken und damit in der Differenz nicht mehr, oder wenigstens stark gemindert, in Erscheinung treten.

○ Beispiel 1: elektrische Meßbrücke (vgl. Kapitel 2)

Sie kann aus zwei parallel angeordneten Spannungsteilern bestehend betrachtet werden. Die Differenz ist die Brückendiagonalspannung, der Abgleich kann im linken oder rechten Brückenweig erfolgen. Störeinflüsse, z.B. durch schwankende Versorgungsspannung, zeigen keine Wirkung auf das Ergebnis.

○ Beispiel 2: Balkenwaage

Zwei Waagschalen zur Aufnahme von Massen, jeweils für Wägegut (Meßgröße) und Gewichtsstücke (Vergleichsgröße, Referenz) sind an einem Balken aufgehängt. Durch die Fallbeschleunigung werden Kräfte am Wägebalken eingeleitet, die diesen auslenken. Der Abgleich erfolgt durch Auflegen von Gewichtsstücken, bis der Wägebalken ausbalanciert ist. Hier ist die Referenzgröße das Maß für die Meßgröße, ähnlich wie bei einer Kreisstruktur. Störungen, z.B. hervorgerufen durch örtlich inhomogene Fallbeschleunigung¹ oder überlagerte Beschleunigung (vertikal bewegte Waage), wirken sich auf das Ergebnis nicht aus.

○ Beispiel 3: Differenzdruckmessung

Beim Messen eines Gasdrucks mittels eines Differenzdruckmessers wird die Membran von der Meßgröße (Druck 1) von einer Seite beaufschlagt, während die Referenzgröße (Druck 2) auf die andere Seite wirkt. Die Auslenkung der Membran ist abhängig vom Differenzdruck. Störeinflüsse, wie Temperaturänderung, zeigen keine Wirkung, wenn sie auf beide Druckquellen und Signalpfade gleich wirken.

Anhand von Beispiel 3 läßt sich zeigen, daß hier auch Verfeinerungen, z.T. in andere Strukturen möglich sind. So kann die Membran als Kettenstruktur betrachtet werden: der Differenzdruck (Signal) bewirkt über die Fläche (Übertragungsfaktor, Funktionsblock) eine Kraft (Signal), diese bewirkt über die Nachgiebigkeit der Membran (Funktionsblock) eine

¹ Die Fallbeschleunigung ist ortsabhängig, z.T. hervorgerufen durch die Überlagerung der Zentrifugalkräfte durch die Erdrotation, aber auch durch ortsabhängige Dichte der Erde. Sie schwankt beispielsweise innerhalb Deutschlands von $g=9,8130\text{m/s}^2$ im Norden bis $g=9,8070\text{m/s}^2$ im Süden. In Mexiko-City, z.B., beträgt die Fallbeschleunigung nur $9,78\text{m/s}^2$ [2], S.652ff.

Auslenkung (Signal). Die Auslenkung könnte z.B. elektrisch mittels der Wegmessung aus dem Beispiel zur Kettenstruktur gemessen werden. Damit würde der Anordnung eine weitere Kettenstruktur folgen.

1.9.3 Kreisstruktur

In Meßgeräten finden sich, sowohl als dominante, wie auch als Teilstruktur, häufig "Rückwirkungen". Diese sind von kreisförmiger Struktur (Bild 36, links oben) und werden auch als Gegenkopplung, Rückführung oder Schleife bezeichnet. Speziell in der Meßtechnik werden Meßverfahren mit solchen Strukturen auch als Kompensationsverfahren bezeichnet, wie später aufgeführte Beispiele zeigen. Grundlage ist die Rückführung eines Ausgangssignals wieder auf den Eingang von bereits durchlaufenen Funktionsblöcken, so daß sich eine Schleife (Kreis) bildet. I.d.R. erfolgt die Rückführung mit negativem Vorzeichen. Bei positivem Vorzeichen liegt eine Mitkopplung vor.

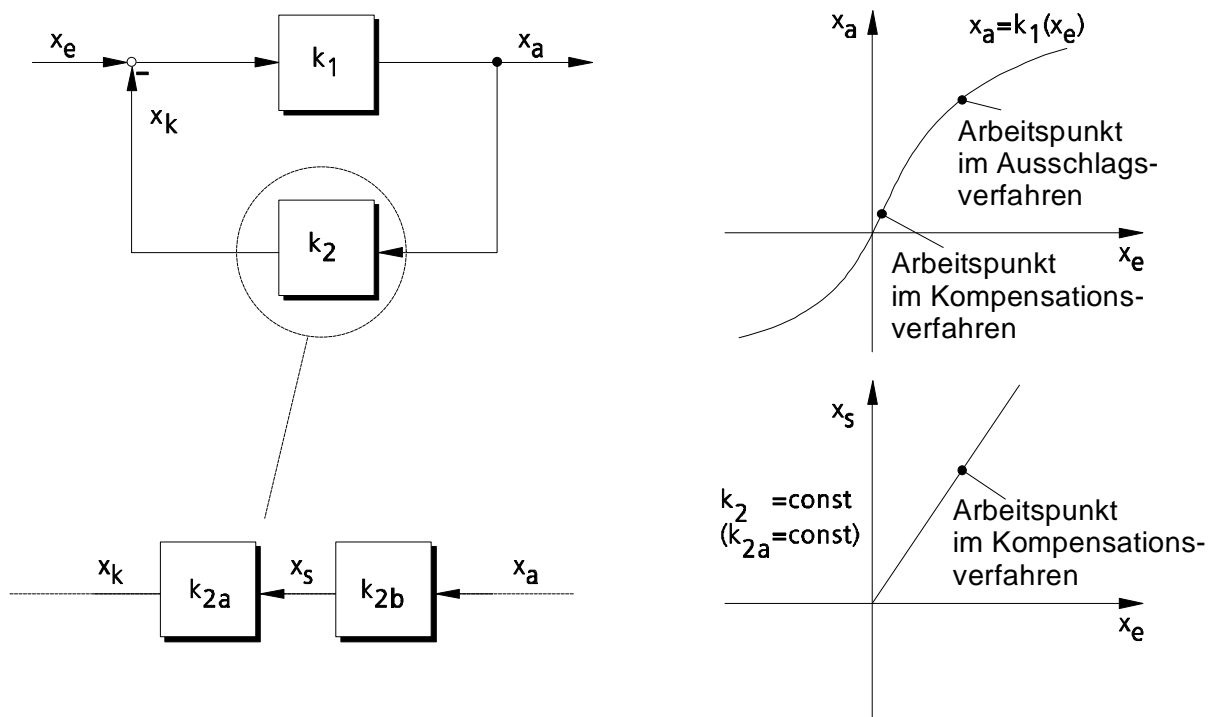


Bild 36: Beispiel einer Kreisstruktur

Solche Systeme können instabil werden (Schwingneigung oder "Wegdriften" zu positiven oder negativen Endwerten). Die dynamischen Eigenschaften ändern sich, verglichen mit den dynamischen Eigenschaften der beteiligten Funktionsblöcke ohne Rückführung, durch die Kreisstruktur ebenfalls. Die mathematische Betrachtung der Stabilität und des dynamischen Verhaltens ist Gegenstand der Systemtheorie und der Regelungstechnik und soll hier nicht weiter vertieft werden.

In der Meßtechnik wird die Kreisstruktur aus vorrangig folgenden Gründen eingesetzt:

- Verbesserung der Dynamik eines Meßgerätes, d.h. die Einstellzeiten werden verkürzt (vgl. Bild 10). Eine Aufgabe, wie sie als Zielsetzung in der Regelungstechnik auftritt und im wesentlichen auf die Dynamik ausgerichtet ist.

- Linearisierung der statischen Kennlinie. Zielsetzung ist ein möglichst linearer Zusammenhang zwischen Meßgröße und Anzeigegröße (vgl. Bild 5). Beispiele und Erläuterungen finden sich nachfolgend.

Desweiteren finden sich Kreisstrukturen bei der Analyse von Strukturen, die "Gegenwirkungen" enthalten. Ein klassisches Beispiel ist ein Federsystem, auf das eine Kraft (oder Drehmoment) eingeleitet wird.

Beispiel 1: Drehspulinstrument (vgl. auch Kapitel 2)

Eine drehbar gelagerte Spule in einem Magnetfeld übt aufgrund eines elektrischen Stromes I_S ein Drehmoment M_S auf eine Feder aus. Es kommt, nach der Beschleunigung der bewegten Massen (dynamische Eigenschaft!) zu einer Drehbewegung der Spule mit dem Drehwinkel α , wodurch die Feder verformt wird.

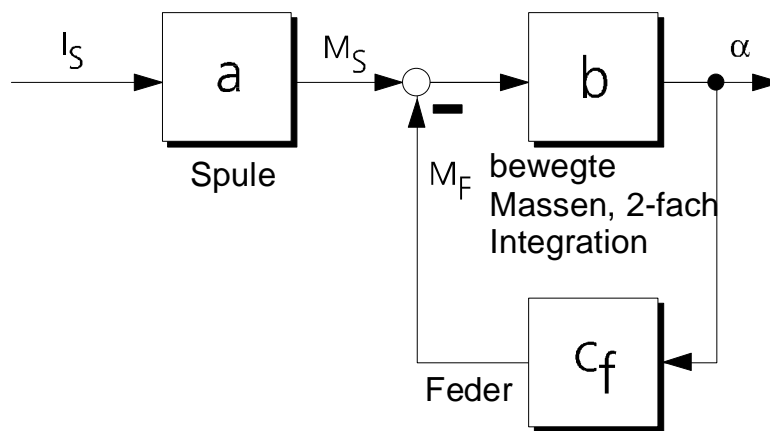


Bild 37: Kreisförmige Struktur am Beispiel eines Drehspulinstrumentes (weitere Hinweise s. Drehspulmeßwerk, Kapitel2)

Aufgrund des Richtvermögens c_F (Federkonstante) der Feder erzeugt diese ein der Ursache entgegengesetztes Drehmoment M_F . Sind M_F und M_S betragsmäßig gleich, tritt eine Beharrung ein, d.h. es stellt sich ein bleibender Drehwinkel α ein, der somit indirekt vom Strom I_S abhängig ist (Bild 37). Hinweis: Das Strukturbild in diesem Beispiel berücksichtigt nicht Drehmomente aufgrund von bewegten Massen (Trägheit) und beschreibt damit nicht das dynamische Verhalten!

Kehren wir zurück zu den **vorrangigen Gründen der Kreisstruktur**. Der erste Grund, Verbesserung der Dynamik, läßt sich an folgendem Beispiel erläutern:

Beispiel 2: Kraftkompensierte Federwaage

Nehmen wir an, eine Waage zur Bestimmung der Gewichtskraft einer Masse m besteht aus einer Waagschale, die an einer Blattfeder aufgehängt ist. Durch ein aufgelegtes Gewichtsstück lenkt die Blattfeder aus (ähnliches Verhalten wie beim Drehspulsystem nach Bild 37) und liefert als Meßergebnis die Auslenkung (Weg) als Maß für die Masse des Gewichtsstückes. Diese Art der Messung wird i.allg. als **Ausschlagverfahren** bezeichnet und ist meistens ausreichend als Kettenstruktur beschrieben.

Aufgrund der bewegten Massen, wie Masse des Gewichtsstückes, Massenteile der Blattfeder, Masse der Waagschale, die zur Auslenkung zuerst beschleunigt werden müssen, stellt sich das Ergebnis erst nach einer endlichen Zeit ein. Speziell hier kommt es außerdem zu einem

regelrechten, dämpfungsabhängigen Einschwingvorgang, wie dieser in Bild 10 dargestellt ist, der die Verfügbarkeit des Meßergebnisses ebenfalls verzögert.

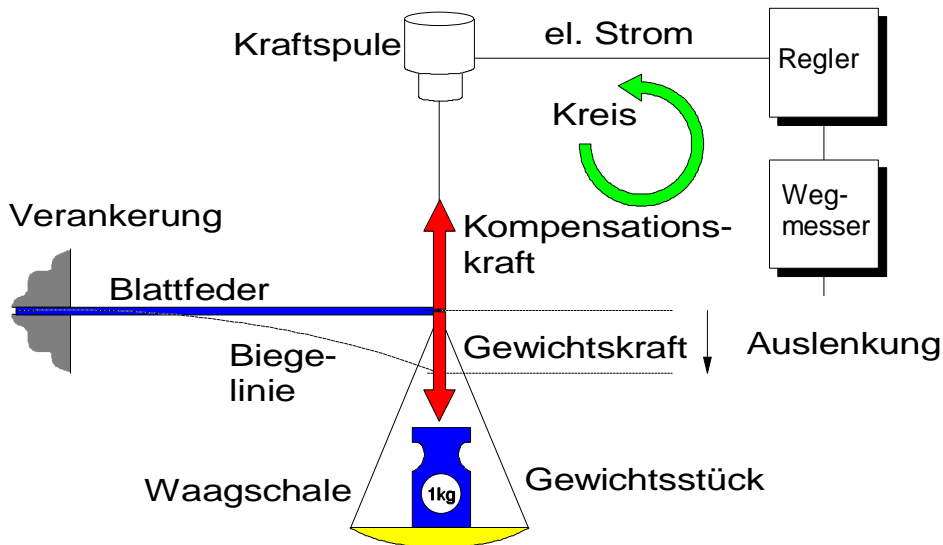


Bild 38: Beispiel einer Kreisstruktur anhand einer kraftkompensierten Federwaage

Wenn das Meßergebnis schneller verfügbar sein soll, dann läßt sich diese Meßanordnung durch eine Kreisstruktur verbessern. Übertragen wir für die Betrachtung die Anordnung in das Strukturbild Bild 36 links oben. Als Funktionsblock k_1 sei die bisherige Anordnung, unter der Vernachlässigung der Dynamik, zusammengefaßt, d.h. der Eingang des Funktionsblockes ist die Kraft (Gewichtskraft x_e), der Ausgang die Auslenkung x_a . Die Anordnung wird nun erweitert um den Funktionsblock k_2 , der die (regelungstechnische) Aufgabe hat jegliche Auslenkung des Feder-Massesystems zu unterbinden, bzw. stark zu mindern, in dem eine **Kompensationskraft** der Gewichtskraft entgegengehalten wird. Dies kann z.B. durch eine elektrische, stromdurchflossene Kraftspule erfolgen (Bild 38). Hierbei wird der Weg (Auslenkung) mittels eines Wegmessers erfaßt und einem Regler zugeführt (zusammengefaßt als Kettenstruktur zum Funktionsblock k_{2b} in Bild 36). Der Regler stellt einen elektrischen Strom zur Verfügung, der über die Kraftspule (Funktionsblock k_{2a}) die erforderliche Kompensationskraft bereitstellt.

Aufgrund der Tatsache, daß die beweglichen Massen keinen, oder zumindest nur kurzfristig beliebig kleinen Auslenkungen ausgesetzt sind, erfolgen auch kaum Beschleunigungsvorgänge. Damit läßt sich, abhängig von der Reglereinstellung, das Meßsystem beim Auflegen eines Gewichtsstückes nahezu beliebig schnell in einen stationären Zustand bringen, bei dem dann das Meßergebnis zur Verfügung steht. Allerdings ist nun nicht mehr die Auslenkung das Maß für die Gewichtskraft - diese wird ja zu Null geregelt - sondern der Kompensationsaufwand, in diesem Fall, wegen der Zugänglichkeit, der elektrische Strom der Kraftspule (im Strukturbild Bild 36 das Signal x_s).

Der zweite **vorrangige Grund** für eine Kreisstruktur ist die **Linearisierung**. Betrachten wir erneut o.a. Beispiel der Kompensationswaage und nehmen an, daß die Messung im Ausschlagverfahren, also hier nur durch Auslenkung, mit beträchtlichen, unerwünschten Linearitätsfehlern behaftet sei. Diese können ihre Ursachen z.B. in einem nichtlinearen Verhalten der Blattfeder oder in Nichtlinearitäten bei der Wegmessung begründet haben. Der

statische Zusammenhang, also die Kennlinie, zwischen der Meßgröße x_e und der Anzeigengröße x_a folge beispielsweise Bild 36 rechts oben und wird mit $x_a = k_1(x_e)$ beschrieben.

Eine Linearisierung ergibt sich nun dadurch, daß die nichtlineare Kennlinie praktisch keinen Einfluß mehr nehmen kann, weil sie selbst nicht mehr durchlaufen wird. Anders formuliert lautet die Aufgabenstellung: Es dürfen keine Arbeitspunkte im nichtlinearen Teil der Kennlinie liegen.

Mittels dem o.a. beschriebenen Kompensationsverfahren wird dies dadurch erreicht, daß keine Ausschläge mehr zugelassen werden. D.h. durch die Kompensation stellen sich nur noch Arbeitspunkte um den Nullpunkt der Kennlinie $k_1(x_e)$ ein, ja bei vollständiger Kompensation liegt der Arbeitspunkt unmittelbar im Nullpunkt. In wie weit die Kompensation geht und welche kurzfristigen Auslenkungen erfolgen ist, wie oben bereits ausgeführt, abhängig vom Regler und dessen Einstellung.

Nehmen wir an, es läge vollständige Kompensation vor. D.h. im stationären Fall gilt stets

$$x_e = x_k \quad (133)$$

Da nun x_s den Meßwert repräsentiert, wird der statische Zusammenhang zwischen der Meß- und der Anzeigengröße (Kennlinie des Meßgerätes) durch

$$x_s = \frac{1}{k_{2a}} x_k = \frac{1}{k_{2a}} x_e \quad (134)$$

beschrieben. Damit ist die Linearität des Meßgerätes nur noch von der Linearität k_2 , bzw. genauer von k_{2a} abhängig. Kompensationsglieder, wie die Kraftspule, können hinsichtlich ihrer Linearität speziell "gezüchtet" werden, so daß mittels Kreisstrukturen Meßsysteme hoher Linearität realisierbar sind.

Wie leicht aus dem Strukturbild hergeleitet werden kann, gilt bei nicht vollständiger Kompensation

$$x_a = \frac{k_1}{1+k_1k_2} x_e \quad (135)$$

bzw. nach Aufspaltung von k_2

$$x_s = \frac{k_1 \cdot k_{2b}}{1+k_1 \cdot k_{2a} \cdot k_{2b}} x_e \quad (136)$$

Hieraus sehen wir, daß für eine starke Unterdrückung der Nichtlinearitäten ein hoher Übertragungsbeiwert k_{2b} , also eine hohe Reglerverstärkung, erforderlich ist. Für $k_{2b} \rightarrow \infty$ erhalten wir dann das gleiche Ergebnis wie in Gl.(134).

In der Praxis erreichen wir dies mit einem Regler mit integralem Anteil (I-, PI, PID-Regler, siehe Regelungstechnik). Anschaulich erklärbar mit dem integralen Verhalten. Solange ein Signal x_a vorliegt, integriert der Regler den Wert auf und erhöht damit das Stellsignal x_s , solange bis x_a zu Null wird.

1.9.4 Selbstkalibrierende Verfahren

Meßgeräte können, wie bereits erwähnt, Einflußgrößen ausgesetzt sein, die die Empfindlichkeit oder den Verlauf der Kennlinie verändern. Typische Vertreter dieser Größen sind beispielsweise Temperatur, Umgebungsdruck, Fallbeschleunigung, Alterung (Zeit) usw.

So kann z.B. die Umgebungstemperatur sowohl Einfluß auf den Nullpunkt als auch auf die Steilheit der Kennlinie eines Meßgerätes nehmen. Im ersten Fall sprechen wir von einer Nullpunktänderung (Offsetdrift), im zweiten Fall von einer Empfindlichkeitsänderung.

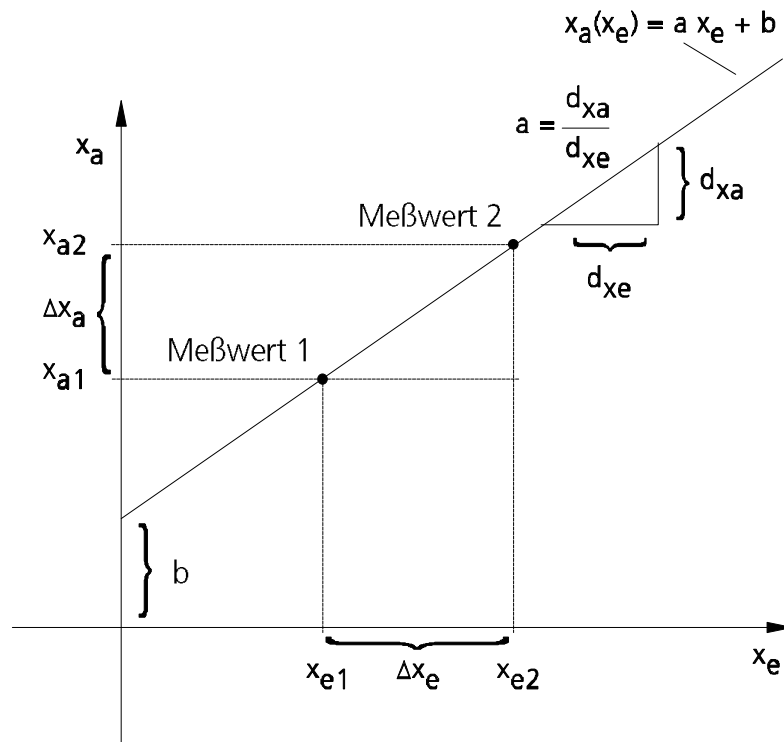


Bild 39: Selbstkalibrierung bei linearer Kennlinie

Diesen Einflußgrößen ist gemein, daß sie sich, verglichen mit den Meßvorgängen (Meßzeiten) langsam ändern, bzw. der Einfluß langsam von statten geht. Deshalb werden solche Einflußgrößen i.d.R. unmittelbar vor der Messung, oftmals manuell, teils selbsttätig, "korrigiert". Beispiele: 1. Waage mit Einstellschraube zur Nullpunkt Korrektur oder 2. Drehpulmeßwerk mit Einstellschraube. Wird auch die Empfindlichkeit vor der Messung neu bestimmt, sprechen wir von einer **Kalibrierung**.

Speziell bei linearen Kennlinien (Bild 39) bieten sich selbsttätige, also automatische, Verfahren zur Nullpunkt Korrektur und zur Empfindlichkeitsbestimmung an. Mittels dieser **Selbstkalibrierung** werden damit auch alle Parameter, nämlich Steigung a und Nullwert b , vollständig bestimmt und damit die Zuordnung Meßgröße- \rightarrow Anzeigegröße eindeutig.

Das Verfahren der Selbstkalibrierung soll anhand einer elektrischen Waage mit digitaler Anzeige beschrieben werden (Bild 40). Die einzelnen Schritte, in die die Messung - Bestimmung einer Masse M - jetzt zerlegt wird, sind hier noch als manuelle Tätigkeit geschildert, können aber leicht auch selbsttätig geschehen. Das Meßgerät verfügt dann über eine Steuerung zur Durchführung der Schritte.

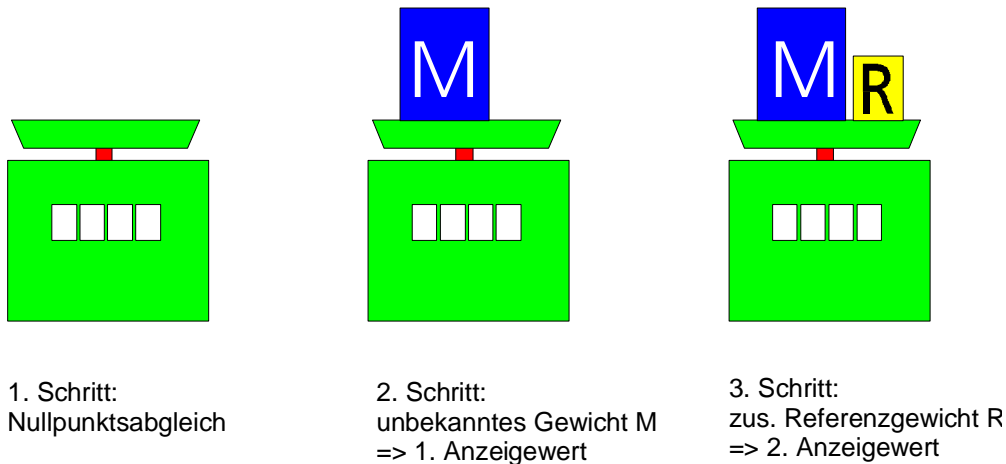


Bild 40: Beispiel einer Selbstkalibrierung bei einer Waage mit in drei Einzelschritte zerlegtem Meßvorgang zur Bestimmung eines Meßwertes.

Der Ablauf einer Messung erfolgt in drei aufeinanderfolgenden Schritten (vgl. hierzu auch Bild 39):

1. **Nullpunktkorrektur:** Der Anzeigewert x_{a0} ohne ein aufgelegtes Gewicht, d.h. Meßgröße $x_e = x_{e0} = 0$, wird ermittelt und gespeichert. Dieser Wert entspricht dem Wert b .
2. **Meßgröße:** Die unbekannte Masse M wird aufgelegt, d.h. die Meßgröße ist $x_{e1} = M$. Es stellt sich ein Anzeigewert x_{a1} ein. Dieser Wert wird ebenfalls gespeichert. Er stellt in Bild 39 den Meßwert 1 dar und wird durch die Lage der noch unbekanntes Kennlinie festgelegt.
3. **Referenzgröße:** Zusätzlich zur unbekanntes Masse M wird eine Referenzmasse R aufgelegt, d.h. die Meßgröße ist um Δx_e angewachsen: $x_{e2} = M + R$. Es stellt sich ein neuer Anzeigewert x_{a2} ein. Dieser Wert wird ebenfalls gespeichert. Er stellt in Bild 39 den Meßwert 2 dar und wird durch die Lage der noch unbekanntes Kennlinie festgelegt.

Nun liegen die Anzeigewerte x_{a0} , x_{a1} und x_{a2} , sowie die bekannte Referenzgröße R vor, aus denen die Masse M bestimmt werden soll. Dazu ist prinzipiell nur der Anzeigewertwert x_{a1} erforderlich, wenn die Kennlinie, in diesem Fall bei linearer Kennlinie die Parameter a und b , bekannt sind. Diese Parameter können jetzt aus den anderen Werten bestimmt werden:

Aus Meßschritt 1:

$$b = x_{e0}. \tag{137}$$

Aus Meßschritt 2 und 3:

$$a = \frac{dx_a}{dx_e} = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{x_{a2} - x_{a1}}{x_{e2} - x_{e1}} = \frac{x_{a2} - x_{a1}}{R}. \tag{138}$$

Damit ergibt sich die unbekanntes Masse M zu

$$x_{a1} = a \cdot M + b$$

$$\Rightarrow M = \frac{x_{a1}-b}{a} = \frac{x_{a1}-x_{a0}}{x_{a2}-x_{a1}} R. \quad (139)$$

Die erforderlichen Rechenoperationen können leicht von einem Mikrorechner durchgeführt und zur Anzeige aufbereitet werden. Dieser übernimmt normalerweise dann auch die Ablaufsteuerung.

Die Messung ist nun nicht mehr kontinuierlich, sondern liegt als 3-schrittige Ablauffolge vor, so daß sich neue Meßwerte jeweils erst nach Ablauf der 3 Schritte einstellen können. Dieser Nachteil steht dem Vorteil gegenüber, daß die Meßwerte stets mit einer kalibrierten Kennlinie gemessen wurden.

Wie aus Gl.(139) ersichtlich ist, wird der Meßfehler (systematischer Fehler) von der Referenzgröße R bestimmt. R sollte nicht zu groß sein, da sonst der Meßbereich eingengt wird. Denn dieser ist für M um R reduziert, da die Summe M+R immer noch im Meßbereich liegen muß. R sollte aber auch nicht zu klein gewählt werden, da sonst der Differenzenquotient in Gl.(139) aus den Anzeigewerten mit endlicher Stellenzahl nicht mehr hinreichend genau ermittelt werden kann und damit das Ergebnis verfälscht wird.

Dieses Verfahren läßt sich auch auf andere Meßvorgänge übertragen.

1.10 Literatur zu den Grundlagen [1]..[22]

- [1] DIN 1319: Grundbegriffe der Meßtechnik
 T1: Grundbegriffe; Entwurf November 1992
 T2: Begriffe für die Anwendung von Meßgeräten; Januar 1980
 T3: Begriffe für die Meßunsicherheit und für die Beurteilung von Meßgeräten und Meßeinrichtungen; August 1983
 T4: Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen; Dezember 1985

- [2] Profos, P.; Pfeifer, T.; (Hrsg.):
 Handbuch der industriellen Meßtechnik
 5. Auflage (1992), 1230S, Oldenbourg-Verlag, München, Wien

- [3] Beitz, W.; Küttner, K.-H.; (Hrsg.):
 Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau
 14. Auflage (1981), 1491S, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

- [4] Hengstenberg, J.; Sturm, B.; Winkler, O.; (Hrsg.):
 Messen, Steuern und Regeln in der Chemischen Technik
 Band I: Betriebsmeßtechnik I, Messen von Zustandsgrößen, Stoffmengen und Hilfsgrößen
 3. Auflage (1980), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

- [5] Hengstenberg, J.; Sturm, B.; Winkler, O.; (Hrsg.):
Messen, Steuern und Regeln in der Chemischen Technik
Band II: Betriebsmeßtechnik I, Messen von Stoffeigenschaften und Konzentrationen
(Physikalische Analytik)
3. Auflage (1980), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

- [6] Kronmüller, H.:
Methoden der Meßtechnik - Eine Systemtheorie für Meßtechniker
(1979), Schnäcker-Verlag, Karlsruhe

- [7] Schrüfer, E.:
Elektrische Meßtechnik
Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen
(1983), Carl Hanser Verlag, München, Wien

- [8] Niebuhr, J.; Lindner, G.:
Physikalische Meßtechnik mit Sensoren
3. Auflage (1994), Oldenbourg-Verlag München Wien

- [9] Ostrovskij, L. A.:
Elektrische Meßtechnik
Grundlagen einer allgemeinen Theorie
2. Auflage (1974), VEB-Verlag Technik, Berlin (DDR)

- [10] Schrüfer, E.; (Hrsg.):
VDI-Lexikon Mess- und Automatisierungstechnik
(1992), VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf

- [11] Tränkler, H.-R.:
Taschenbuch der Meßtechnik mit Schwerpunkt Sensortechnik
(1989), R. Oldenbourg-Verlag, München, Wien

- [12] Hart, H.:
Einführung in die Meßtechnik
5. Auflage (1989), Verlag Technik, Berlin

- [13] Junge, H.-D.; (Hrsg):
parat / Jahrbuch der Meßtechnik 1987
(1987), VCH-Verlag, Weinheim

- [14] Junge, H.-D.; (Hrsg):
parat / Jahrbuch der Meßtechnik 1988
(1988), VCH-Verlag, Weinheim
- [15] Reissmann, G.:
Die Ausgleichsrechnung - Grundlagen und Anwendungen in der Geodäsie
5. Auflage (1980), VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin (DDR)
- [16] Best, R.:
Digitale Meßwertverarbeitung
(1991), R. Oldenbourg-Verlag, München, Wien
- [17] Oppenheim, A.V.; Willsky, A.S.:
Signale und Systeme
1. Auflage in Deutsch (1989), VCH-Verlag, Weinheim
- [18] Cooper, W., D.; Helfrick, A., D.:
Elektrische Meßtechnik, Lehrbuch
VCH Verlagsgesellschaft Weinheim (1989)
- [19] Engelin-Müllges, G.; Reutter, F.:
Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit C-Programmen
2. Auflage (1990)
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich
- [20] Zurmühl, R.:
Praktische Mathematik für Ingenieure
5. Auflage (1965)
Springer Verlag Berlin
- [21] Paul, M.:
Digitale Meßwertverarbeitung - Methoden und Fallstudien
2. Auflage (1987) VDE-Verlag, Offenbach
- [22] Unbehauen, R.:
Systemtheorie - Eine Darstellung für Ingenieure
Oldenbourg-Verlag München Wien (1980) 3. Auflage

2 Elektrische Meßtechnik

Lernziel: Elektrische Meßgrößen und deren Einheiten, Aufbau und Funktionsweise der wichtigsten elektrischen Meßgeräte der Elektrotechnik und der wichtigsten Verfahren

Die moderne Meßtechnik, auch die Meßtechnik anderer Disziplinen als der Elektrotechnik, wie Fertigungsmeßtechnik, Meßtechnik für mechanische oder chemische Größen, usw. wird dominiert von elektrischen Meßverfahren. D.h. nichtelektrische Größen werden in elektrische Signale umgesetzt. Diesem zentralen Stellenwert Rechnung zu tragen wird der elektrischen Meßtechnik ein getrenntes Kapitel gewidmet, gewissermaßen auch als Grundlage für das elektrische Messen nichtelektrischer Größen. Für den Elektrotechniker spielen die hier betrachteten Meßtechniken natürlich besonders für Laboranwendungen eine große Rolle.

2.1 Wichtige elektrische Größen

Lernziel: Größen der Elektrotechnik; Definitionen und Einheiten

2.1.1 Elektrische Spannung

Meßgröße

Die elektrische Spannung ist definiert als Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten [39]

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (140)$$

Einheit: Volt

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach A. *Volta* (1745-1827): Ein Volt ist gleich der Spannung oder elektrischen Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines fadenförmigen homogenen und gleichmäßig temperierten metallischen Leiters, in dem bei einem zeitlich unveränderlichen Strom der Stärke 1 A (vgl. "elektrischer Strom"; SI-Einheit) zwischen den beiden Punkten die Leistung 1 W umgesetzt wird [27]. Einheitenkurzzeichen: V.

Normale

Seit vielen Jahren benutzt man als Spannungsnormale ein elektrochemisches (galvanisches) Element, das sog. **gesättigte Normalelement**, oder Weston-Normalelement. Es liefert eine Nominalspannung von 1,01858 Volt bei 20°C und ist temperaturabhängig mit etwa $-40\mu\text{V/K}$ [27][32]. Diese Elemente können aufgrund ihres Innenwiderstandes nur geringfügig belastet werden. Sie werden i.d.R. in temperaturstabilisierten Ölbädern betrieben und können über einen Zeitraum von 20..30 Jahren benutzt werden.

Andere Spannungsnormale beruhen auf Silizium-Z-Dioden, die eine relative Temperaturabhängigkeit ($\Delta V/V$) von nur bis zu 10^{-6}K^{-1} zulassen.

Weitere Normale basieren auf dem Josephson-Effekt, ein Tunneleffekt bei Supraleitung. Dabei wird eine Dünnschicht, bestehend aus zwei supraleitenden Schichten, die durch eine dünne Isolationsschicht (Sperrschicht) getrennt sind, bis auf fast 0 K (absoluter Nullpunkt) gekühlt und Strahlung durch Mikrowellenenergie ausgesetzt. Dadurch entsteht eine Spannung u über der Sperrschicht (typ. Dicke 1,5 nm), die zu der Frequenz f der Strahlung über das Planck'sche Wirkungsquantum h in Relation steht:

$$u = \frac{hf}{2e}. \quad (141)$$

Dabei ist e die Ladung eines Elektrons. Damit ist die Spannung auf Naturkonstanten und eine Frequenz, bzw. indirekt der Zeit zurückgeführt [27].

2.1.2 Elektrischer Strom

Meßgröße

Der elektrische Strom ist die Flußrate elektrischer Ladung [32][39]:

$$I = \frac{Q}{t} \quad (142)$$

und ist über das elektrodynamische Kraftgesetz als Leiter der Länge l mit der Kraft verknüpft:

$$\vec{F} = \int_l I (d\vec{s} \times \vec{B}). \quad (143)$$

Wird B über einen zweiten Leiter erzeugt, dann erfährt ein Leiterpaar mit den Strömen I_1 und I_2 der jeweiligen Leiterlänge l im Abstand a und im Medium μ (Permeabilität, beinhaltet die Naturkonstante μ_0 (=Feldkonstante)) die Kraft

$$F = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (144)$$

Einheit: Ampere

SI-Einheit, festgelegt auf der 9. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (1948), benannt nach *A. M. Ampère* (1775-1836): Das (absolute) Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1m Leiterlänge, elektrodynamisch die Kraft $0,2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ hervorrufen würde [27]. Einheitenkurzzeichen: A.

Normale

Anfangs wurde das Ampere mittels einer Stromwaage als Kraftmessung (elektrodynamisch) ermittelt. Durch die technische Unzulänglichkeit der Kraftmessung wurde dann die Definition über die Abscheidung von Silber in einer Silbernitritlösung geändert (1,118 mg Silber in 1 s). Da die Mengenerfassung des abgeschiedenen Silbers problematisch ist, wurde die Definition 1948 (s.o.) wieder auf eine Kraftmessung zurückgeführt. Modernere Wägetechnik erlaubt heute eine verbesserte Kraftmessung. Die Stromwaage mißt die elektrodynamische Kraft zwischen zwei Leitern, die aus praktischen Gründen als Spulen ausgeformt sind. Die Beziehung zwischen Kraft und Strom kann aus der elektrodynamischen Theorie begründet werden.

2.1.3 Elektrische Ladung

Meßgröße

Die elektrische Ladung ist ein Maß für die Elektrizitätsmenge.

Einheit: Coulomb

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *Ch. A. de Coulomb* (1736-1806): Ein Coulomb ist gleich der Elektrizitätsmenge, die während der Zeit 1 s bei einem zeitlich unveränderlichen elektrischen Strom der Stärke 1 A durch den Querschnitt eines Leiters fließt [27]. Einheitenkurzzeichen: C.

Normale

Als Normal für die elektrische Ladung wird die Definitionsgleichung und der Bezug zum Ampere verwendet. Sonderfall: Elektronenladung e (siehe Kapitel Grundlagen, Konstanten).

2.1.4 Elektrische Leistung

Meßgröße

Definitionsgemäß ist die Leistung als Energie pro Zeiteinheit festgelegt [39]:

$$P = \frac{E}{t}; \quad \text{bzw.} \quad E = \int P(t)dt. \quad (145)$$

Die Verbindung der elektrischen Energie mit anderen Energieformen ist im SI über die Gleichwertigkeit von elektrischer, mechanischer und thermischer Energie (Wattsekunde-Newtonmeter-Joule) gegeben.

Einheit: Watt

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *James Watt* (1736-1819): Ein Watt ist gleich der Leistung, bei der während der Zeit 1 s die Energie 1 J umgesetzt wird [27]. Einheitenkurzzeichen: W

Normale

Normale für die Leistung sind nicht verfügbar. Referenzgrößen können aber über die Definition hergestellt werden.

2.1.5 Magnetischer Fluß und Flußdichte

Meßgröße

Der Magnetische Fluß Φ ist über eine Fläche A mit der Flußdichte B verknüpft [39]:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (146)$$

Er tritt aber auch, als verketteter Fluß Ψ beim Induktionsgesetz in Erscheinung und ist dort mit den elektrischen Größen verknüpft:

$$u = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} \right) \quad (147)$$

Es existieren zwei Erscheinungsformen: die zeitliche Änderung von der Flußdichte $B(t)$ und die zeitliche Änderung der Fläche $A(t)$, die von der Kurve C umschlossen wird.

Einheit: Weber

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *W. E. Weber* (1804-1891): Ein Weber ist gleich dem magnetischen Fluß, bei dessen gleichmäßiger Abnahme während der Zeit 1 s auf Null in einer ihm umschlingenden Windung die elektrische Spannung 1 V induziert wird. Einheitenkurzzeichen: Wb.

Für die Flußdichte B ist die abgeleitete SI-Einheit 1 T (=1 Tesla) festgelegt, benannt nach *N. Tesla* (1856-1943): Ein Tesla ist gleich der Flächendichte des homogenen magnetischen Flusses 1 Wb, der die Fläche 1 m² senkrecht durchsetzt. Einheitenkurzzeichen: T.

Normale

Es gibt Normale für den magnetischen Fluß, bzw. genauer gesagt für die Flußdichte B (Gl.(146)), die nicht über die Definition der Einheit Wb festgelegt sind, sondern als fast geschlossene Magnetkreise aus dauermagnetischen Werkstoffen hergestellt sind. Über einen kleinen Luftspalt läßt sich dann die zeitlich konstante Flußdichte als Vergleichsgröße, z.B. mittels einer Hallsonde, abgreifen.

2.1.6 Elektrischer Widerstand

2.1.6.1 Ohmscher Widerstand und Leitwert

Meßgröße

Gleichstromwiderstand, definiert über das Ohm'sche Gesetz [39]:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (148)$$

Einheit: Ohm

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *Georg Simon Ohm* (1787-1854): Ein Ohm ist gleich dem elektrischen Widerstand zwischen zwei Punkten eines fadenförmigen, homogenen und gleichmäßig temperierten elektrischen Leiters, durch den bei der elektrischen Spannung 1 V zwischen den beiden Punkten ein zeitlich unveränderlicher elektrischer Strom der Stärke 1 A fließt [27]. Einheitenkurzzeichen: Ω .

Der Kehrwert des ohmschen Widerstandes wird als elektrischer Leitwert bezeichnet und ist mit der abgeleiteten SI-Einheit Siemens, benannt nach *Werner von Siemens* (1816-1892) versehen: Ein Siemens ist gleich dem elektrischen Leitwert eines Leiters vom elektrischen Widerstand 1 Ohm [27]. Einheitenkurzzeichen: S.

Normale

Widerstandsnormale sind Einzelwiderstände (Normalwiderstände) höchster Genauigkeit und Konstanz mit getrennten Anschlüssen für Spannung und Strom (siehe Shunt). Fehlergrenzen von 0,01% vom Sollwert sind üblich. Widerstandswerte von $10^{-4}..10^6\Omega$ sind in dekadischer Stufung erhältlich. Als Widerstandsmaterialien sind Kupfer- und Nickellegierungen, sowie Manganin oder Isa-Ohm gebräuchlich. Zur Temperaturstabilisierung werden solche Widerstände u.U. auch in einem thermostatisierten Ölbad betrieben. Normale für Widerstände sind besonders wichtig für den Einsatz in Meßbrücken, oder zur Umformung von Strom in Spannung.

Die Darstellung der Einheit Ohm ist besonders präzise über den Quanten-Hall-Effekt (Von-Klitzing-Effekt) möglich. Damit ist das Ohm nur über zwei Naturkonstante (Planck'sches Wirkungsquantum h und Elementarladung e) definiert [27].

2.1.6.2 Kapazität

Meßgröße

Elektrische Ladung durch eine elektrische Spannung zwischen zwei Elektroden [39]

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (149)$$

Die Kapazität ist somit ein Maß für das Speichervermögen eines Kondensators. Im Wechselstromkreis der Kreisfrequenz $\omega=2\pi f$ wirkt die Kapazität wie ein Blindwiderstand (Kapazität $X_C=(\omega C)^{-1}$) mit der Einheit Ohm.

Einheit: Farad

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *M. Faraday* (1791-1867): Ein Farad ist gleich der elektrischen Kapazität eines Kondensators, der durch die Elektrizitätsmenge (Ladung) 1 C auf die elektrische Spannung 1 V aufgeladen wird [27]. Einheitenkurzzeichen: F.

Normale

Kapazitätsnormale werden hauptsächlich in Wechselstrombrücken benötigt. Sie sind i.d.R. als Luftkondensatoren, also mit Luft als Dielektrikum, meist plattenförmig, aufgebaut [32]. Die Kapazitätswerte lassen sich aus der Geometrie bestimmen. Für größere Kapazitätswerte werden Kondensatoren mit Dielektrikum, meist Glimmer, verwendet. Diese sind sehr temperaturstabil und haben kleine Verlustfaktoren. Gebrauchsnormale haben eine Kapazität zwischen 100 pF und 10 000 pF.

2.1.6.3 Induktivität

Meßgröße

Proportionalitätsfaktor zwischen elektrischem Strom und dem von ihm erzeugten magnetischen Fluß [39]

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (150)$$

Die Induktivität ist somit ein Maß für das Speichervermögen einer Spule. Im Wechselstromkreis der Kreisfrequenz $\omega=2\pi f$ wirkt die Induktivität wie ein Blindwiderstand (Induktanz $X_L=\omega L$) mit der Einheit Ohm.

Einheit: Henry

Abgeleitete SI-Einheit, benannt nach *J. Henry* (1797-1878): Ein Henry ist gleich der Induktivität einer geschlossenen Windung, die, von einem elektrischen Strom der Stärke 1 A durchflossen, im Vakuum den magnetischen Fluß 1 Wb umschlingt. Einheitenkurzzeichen: H.

Normale

Normale für Induktivitäten werden mehrlagig mit etwa quadratischem Wicklungsquerschnitt hergestellt und sind mit Induktivitäten von 0,1 mH bis 1 H erhältlich. Sie werden hauptsächlich in Meßbrücken eingesetzt.

2.1.7 Mit elektrischen Größen verknüpfte Größen

Über physikalische Gesetze und Definitionen sind die elektrischen Größen noch mit anderen Größen verknüpft. Die Definition der Einheiten dieser Größen wird an geeigneter Stelle gegeben. Folgende Größen sind dabei hervorzuheben:

- Geometrische Größen, wie Längen [m], Flächen [m²], Volumina [m³] und Winkel [°, rad]
- Temperatur [K]
- Energie [Nm, Ws, J]
- Kraft [N]
- Zeit [s]
- Frequenz [Hz]

und andere.

2.2 Messen primärer elektrischer Größen

Lernziel: Einrichtungen zur Anzeige von Meßwerten. Prinzipien, Verfahren - Vor-/Nachteile, Struktur

2.2.1 Meßwerke

Lernziel: Anzeigen von Meßergebnissen und Umformung von elektrischen Größen in einen Anzeigewert

2.2.1.1 Drehspulmeßwerk

Als Meßwerke sind heute mechanische und elektronische anzutreffen. Die mechanischen sind normalerweise Zeigerinstrumente, bei denen der Zeiger durch eine elektrodynamische Kraft, also mittels einer Spule, ausgelenkt wird. Die Spule befindet sich dabei in einem Magnetfeld. Dadurch wird ein Drehmoment auf den Zeiger mit Federrückstellung ausgeübt. Der Ausschlagwinkel ist dann das Maß für die ursächliche Größe, z.B. der elektrische Strom I (Bild 41).

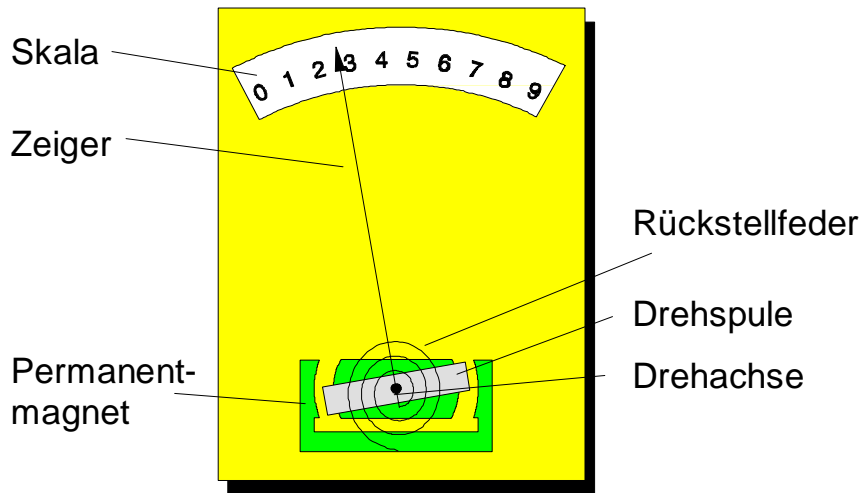


Bild 41: Meßwerk eines Drehspulzeigerinstrumentes

Das **Drehspulmeßwerk** des **Drehspulinstrumentes** (Bild 41) besteht aus einem Dauermagneten (Permanentmagnet), der mit Polschuhen versehen ist, die einen Kern derart umschließen, daß ein Luftspalt mit möglichst homogener Flußdichte entsteht. Die Windungen einer drehbar gelagerten Spule durchsetzen zum Teil diesen Luftspalt, so daß ein Strom I_S ein Drehmoment M_S (Übertragungsbeiwert a in Bild 42) bewirkt, das möglichst streng proportional zum Strom I_S sein soll. Die Folge ist ein Auslenken des Zeigers. D.h. der Zeiger samt der bewegten Massen (z.B. die Spule selbst), bilden ein Trägheitsmoment J , welches zunächst zu einer Winkelbeschleunigung

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha} = \frac{1}{J} [a I_S - c_f \alpha - D \dot{\alpha}] \quad (151)$$

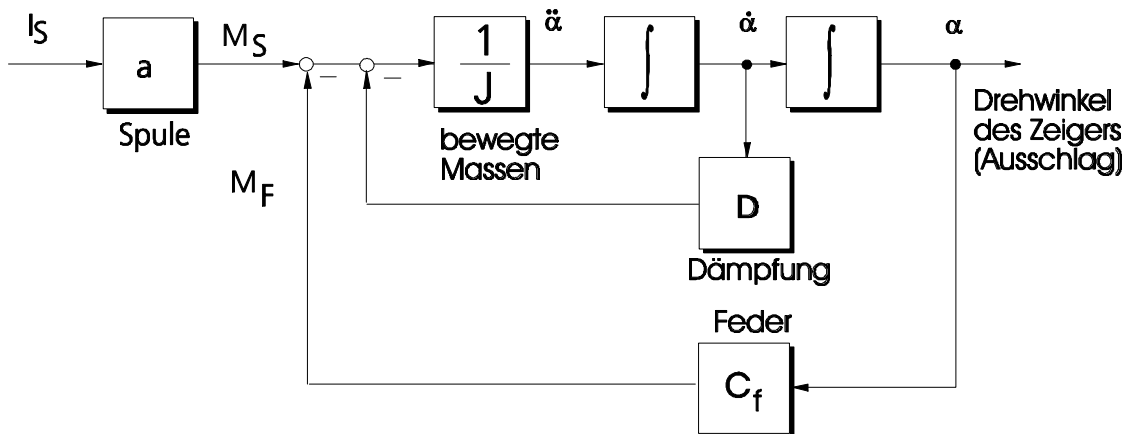


Bild 42: Strukturbild (verfeinert mittels systemtheoretischen Funktionsblöcken) eines Drehspulinstrumentes.

führt. Betrachten wir Bild 42. Die Auslenkung des Zeigers verursacht ein Rückstellmoment M_F durch die Feder mit dem Richtvermögen c_f . Bei dem endgültigen Zeigerausschlag, infolge eines als konstant angenommenen Spulenstroms I_S , kommt der Zeiger dann zum Stillstand, wenn sich das Drehmoment durch die Spule sich genau mit dem Rückstellmoment der Feder

aufhebt. Damit wird der Ausdruck nach Gl.(151) zu Null, d.h. die Winkelbeschleunigung verschwindet.

Über den Zusammenhang (Gl.(151))

$$a(l_S, t) = \int_0^t \int_0^\tau \ddot{a}(l_S, \xi) d\xi = \int_0^t \int_0^\tau \frac{a l_S - c_f a - D \dot{a}}{J} d\xi \quad (152)$$

läßt sich dann der Auslenkungswinkel für den stationären Endwert (=Meßwertanzeige), d.h. $\ddot{a} = 0$ und $\dot{a} = 0$, berechnen

$$l_S a = c_f a \Rightarrow a(t \rightarrow \infty) = \frac{a}{c_f} l_S. \quad (153)$$

Der Einschwingvorgang wird hier im wesentlichen durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben. Das Überschwingen wird durch den Dämpfungsterm D (Bild 42) bestimmt.

Für Drespulmeßwerke ergeben sich somit folgende - offensichtliche - Forderungen:

- Homogenes Magnetfeld im Luftspalt, um ein drehwinkelunabhängiges Drehmoment zu erhalten, ansonsten stellen sich Linearitätsfehler ein.
- Hohe Flußdichte im Luftspalt, um ein hohes Drehmoment bei geringem Meßstrom zu gewährleisten; damit werden die Rückwirkungen auf die Meßgröße reduziert.
- Keine undefinierten Reibungskräfte, wie z.B. Lagerreibung, die nicht geschwindigkeitsproportional sind, da diese Hysteresefehler verursachen können.
- Konstantes Richtvermögen der Feder, da dieses auf die Linearität einwirkt. Dieser und der vorgenannte Punkt führen zum Beispiel dazu, daß der Strom für die Spulen über zwei Spiralfedern zugeführt wird.

2.2.1.2 Dreheisenmeßwerk

Ein anderes gängiges Verfahren nutzt das **Dreheisenmeßwerk**. Es wird besonders für die Messung von Wechselstromgrößen eingesetzt, da es den Effektivwert des Stromes mißt. Bei der Messung von Wechselströmen wird hierauf noch weiter eingegangen.

Bild 43 soll das Prinzip näher erläutern. In einer Spule befinden sich zwei Eisenkerne mit möglichst kleiner Remanenz. Ein Kern ist ortsfest zur Spule, der zweite ist derart beweglich aufgehängt, daß durch die Bewegung der Abstand zum ersten Kern verändert wird. Bei durchfluteter Spule bilden sich in den Kernen benachbarte Nord- bzw. Südpole aus und es kommt zu einer Abstoßungskraft. Der bewegliche Kern verändert seine Lage. Auf einen Zeiger in eine Drehbewegung übertragen ergibt sich wieder ein Drehmoment, welches letztendlich über einen Drehwinkel zu einem ablesbaren Skalenwert führt.

Im Gegensatz zum Drehspulmeßwerk ist die Kraft, bzw. Drehmoment, abhängig vom Ausschlag. Je größer der Ausschlag, desto geringer wird die Kraft. Durch besondere konstruktive Maßnahmen läßt sich aber auch hier eine vernünftige Meßwertanzeige finden. Oft haben Dreheiseninstrumente keine lineare Skale [32][25][28].

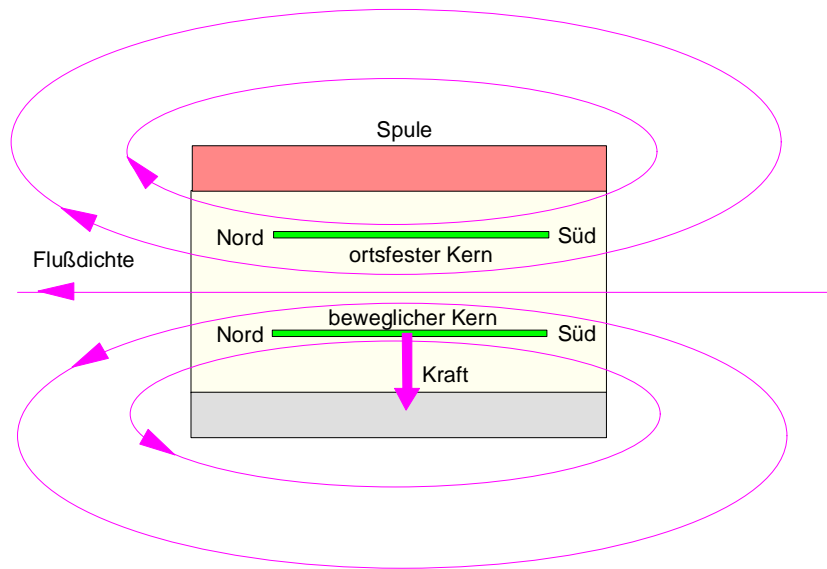


Bild 43: Prinzip des Dreheisenmeßwerks: Die Flußdichte magnetisiert die beiden Kerne aus magnetischem Werkstoff (z.B. Eisen), es wirkt eine Abstoßungskraft F , die den beweglichen Kern verschiebt.

Als weitere mechanischen Meßwerke können auch Zähler (Stoßklinkenzähler, Zählerräder), wie z.B. beim Elektrizitätszähler, betrachtet werden. Diese haben ein integrierendes, bzw. summierendes Verhalten.

2.2.1.3 Skalen von mechanischen Meßwerken

Bei den Zeigerinstrumenten kann beim Ablesen des Skalenwertes ein weiterer Fehler, der sog. **Parallaxefehler**, auftreten (Bild 44). Dieser rührt daher, daß durch die mechanische Anordnung des Zeigers dieser stets in einer anderen Ebene liegen muß, als die Skala, die die Marken trägt. Denn wären beide in einer Ebene, wären störende Reibungskräfte die Folge.

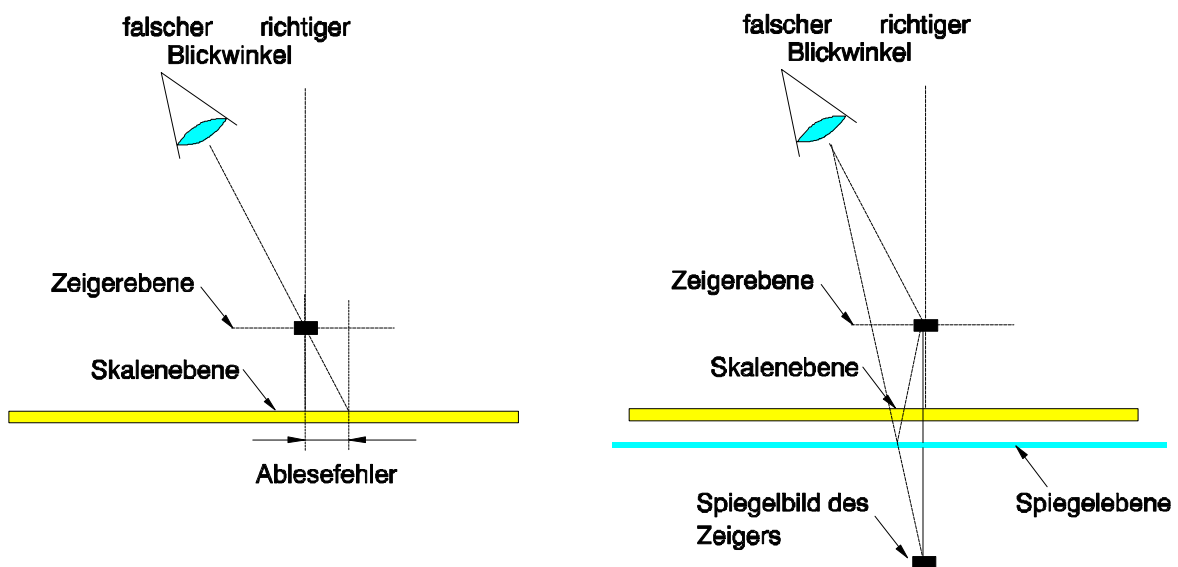


Bild 44: Parallaxe bei Zeigerinstrumenten

Der Parallaxefehler tritt immer dann auf, wenn nicht exakt senkrecht zur Skalen- und Zeigerebene abgelesen wird (s. Bild 44 links). Vermeiden lassen sich Parallaxefehler durch

Ablesehilfen. Dies kann z.B., bei einfacheren Ausführungen, ein fähnchenartig, parallel zur Blickrichtung ausgebildetes Ende des Zeigers sein, so daß bei nicht senkrechter Betrachtung die seitlichen Fähnchenflächen sichtbar werden. Sehr gängig ist auch ein hinterlegen der Skale mit einem Spiegel, so daß sich nur bei senkrechter Blickrichtung eine Flucht aus Zeiger und seinem Spiegelbild ergibt (s. Bild 44 rechts).

2.2.1.4 Schaltungssymbole

Als Schaltsymbol für Zeigerinstrumente sind z.B. Symbole nach Bild 45 gebräuchlich. Das ideale Meßwerk (links) verfügt über einen vernachlässigbaren Innenwiderstand, wenn es als Amperemeter betrieben wird, bzw. über einen vernachlässigbaren Leitwert wenn es als Voltmeter betrieben wird (s. Strom-/Spannungsmessung). In der Realität weist das Meßwerk aber sowohl einen Widerstand (Spulenwiderstand zzgl. Beschaltung) und eine Spuleninduktivität auf. In der Ersatzschaltung (rechts) sind diese Größen explizit ausgewiesen. Dort wird mit dem Zeigersymbol keine Aussage über den Widerstand getroffen.

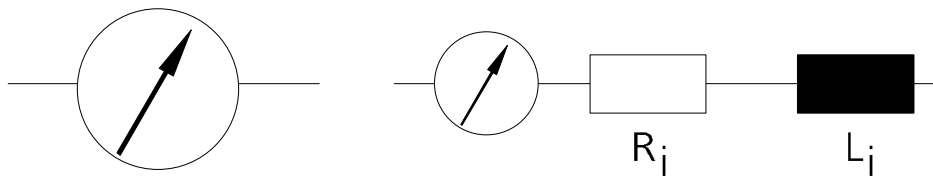


Bild 45: Schaltsymbol eines idealen Meßwerkes (links); Ersatzschaltung eines realen Meßwerkes (rechts); Erläuterungen siehe Text.

2.2.1.5 Elektronische Meßwerke

Elektronische Meßwerke (Bild 46) sind mit einer Anzeigematrix oder einem Anzeigefeld ausgestattet [29]. Neuerdings finden sich auch quasi-analoge Anzeigen, bei denen die markierten Anzeigefelder mit dem Meßwert anwachsen, sog. Balkenanzeige (Bild 46 rechts).

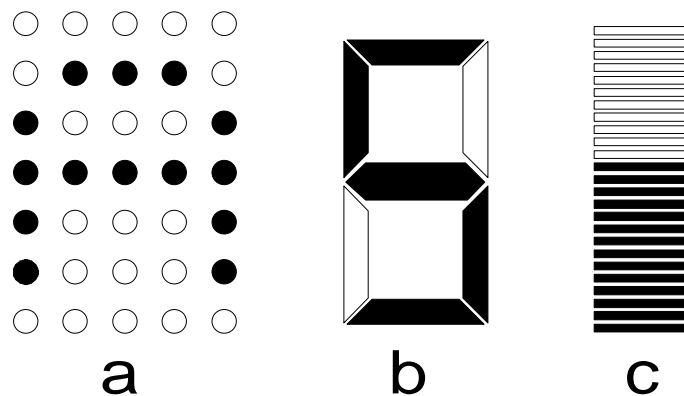


Bild 46: Elektronische Anzeigen:
 a) Punktmatrix, z.B. Buchstabe A in einer 5x7-Matrix,
 b) 7-Segment-Anzeige, z.B. Ziffer 5,
 c) Balkenanzeige, z.B. ca. 50% des Vollausschlags.

Zur Darstellung einer Punktmatrix (Bild 46 a) werden matrixförmig angeordnete Leuchtpunkte, wie z.B. LEDs (lichtemittierende Dioden) [35], LCDs (liquid Cristal Display) in lichtreflektierender oder lichtdurchlassender Technik, Plasmaanzeigen oder aber auch, besonders bei großflächigen Anzeigen, Glühbirnen verwendet. Diese Technik wird prinzipiell

auch bei allen Anzeigen verwendet, die über einen Bildschirmspeicher laufen, der punktorientiert ist (Pixel), wie z.B. Rechnerbildschirme (CRT=Cathode Ray Tube). Mechanische Klappenanzeigen werden bei sehr großflächigen oder bei sehr heller Umgebung auch eingesetzt.

7-Segmentanzeigen (Bild 46 b) werden in LED-, LCD- und mittels Klappenanzeigentechnik, z.B. Zapfsäulen an Tankstellen, aufgebaut. Balkenanzeigen sind fast ausnahmslos in LED- oder LCD-Technik hergestellt und meistens, als quasi-analoge Anzeigenunterstützung, im Feld einer digitalen Anzeige integriert, wie beispielsweise bei Multimetern.

Für eine Trenderkennung, bzw. zur Erkennung eines groben Anhaltswertes sind Zeiger- bzw. Balkenanzeigen (Bild 46 c) besser geeignet. Die Ziffernanzeigen weisen dafür für die Anzeige eine höhere Stellengenauigkeit (nur Anzeigengenauigkeit!) auf.

Die Meßgröße, hier i.d.R. eine elektrische Spannung, muß vorher durch analog-digital-Wandlung und ggf. Codeumsetzung aufbereitet werden (s. A/D-Wandler).

2.2.2 Gleichspannungs- und Gleichstrommessung

Lernziel: Spannungs- und Strommessungen, ihre Meßschaltungen und ihre Besonderheiten; Gleichströme und -spannungen und Ströme, bzw. Spannungen mit nichtsinusförmigen, zeitveränderlichen Verläufen

2.2.2.1 Gleichspannungsmessung

Spannungsmessungen müssen definitionsgemäß (Gl.(140)) an zwei Meßpunkten erfolgen. Jede Spannungsquelle, als solche gelten alle Zweipole, die eine Spannung aufweisen, weist eine Leerlaufspannung und einen Innenwiderstand auf (Bild 47).

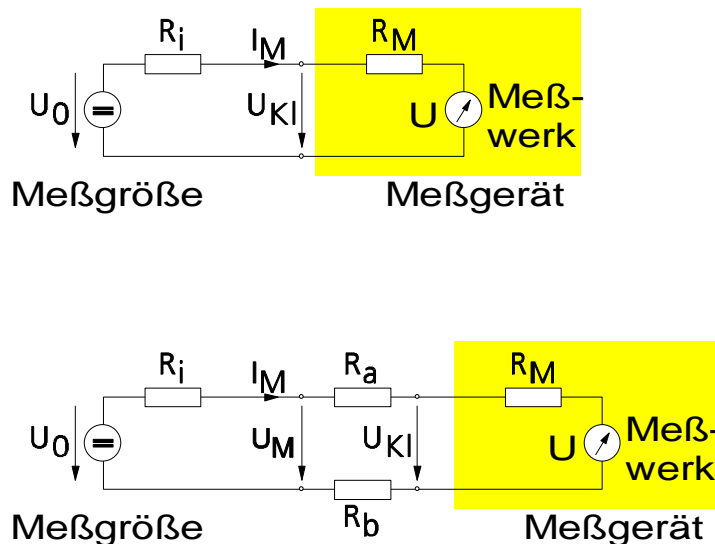


Bild 47: Spannungsmessung ohne (oben) und mit (unten) widerstandsbehafteten Leitungen

Wird über eine solche Spannungsquelle ein Meßabgriff gelegt, so belastet das elektrische Meßgerät die Spannungsquelle, denn das Meßgerät besitzt einen Widerstand R_M (Bild 47 oben). Es gilt die Spannungsteilerformel

$$U_{KI} = U_0 \frac{R_M}{R_i + R_M} \tag{154}$$

Das Meßgerät zeigt den Spannungswert U_{KL} an, der entsprechend Gl.(154) kleiner ist, als der gesuchte Meßwert U_0 . Im praktischen Einsatz kommen noch Leitungswiderstände der Meßleitungen R_a und R_b hinzu (Bild 47 unten):

$$U_{KI} = U_0 \frac{R_M}{R_i + R_a + R_b + R_M} \tag{155}$$

welche das Ergebnis weiter verfälscht. Bei Kenntnis von R_i und R_M , sowie der Leitungswiderstände R_a und R_b (inkl. sonstiger Widerstände wie z.B. Kontaktwiderstände) läßt sich das Ergebnis nach den Gln. (154) und (155) korrigieren. I.d.R. sind aber nur R_M und ggf. noch R_a und R_b bekannt, so daß zur Verringerung des systematischen Fehlers

$$R_M \gg R_i \text{ und } R_a, R_b \ll R_M \tag{156}$$

gefordert wird.

Der Widerstand des Meßgerätes rührt daher, daß eine gewisse Stromaufnahme zur Umsetzung in eine Anzeige erforderlich ist. Z.B. bei elektrodynamischen Meßwerken durch die Spule oder bei digitalanzeigenden Meßgeräten durch Eingangsimpedanzen von Meßverstärkern.

Zur Anpassung des Anzeigebereiches an den Wertebereich der zu messenden Spannung kann bei zu großer Spannung U_{KL} die Spannung U direkt am Meßwerk (Bild 47, bzw. Bild 48) durch einen Vorwiderstand oder Spannungsteiler angepaßt werden. Die Zusammenhänge werden wieder über die Spannungsteilerformel hergeleitet.

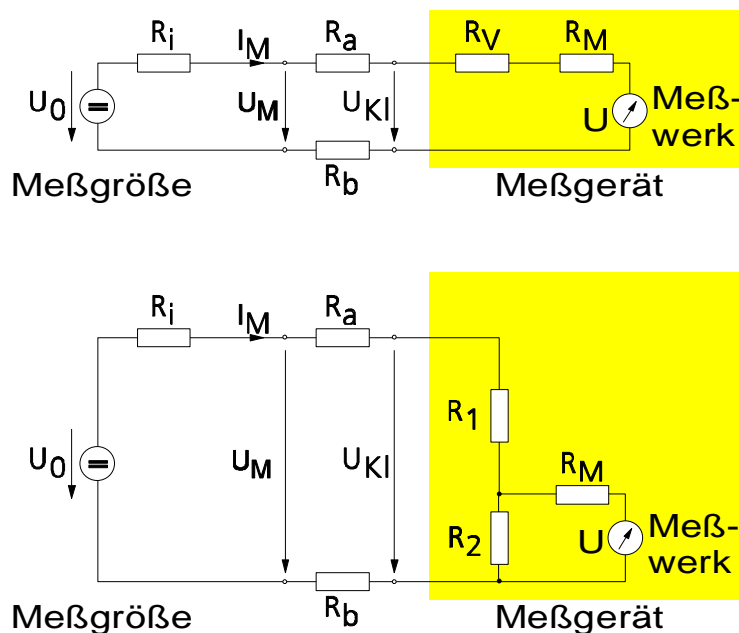


Bild 48: Anpassung des Meßgerätes an den Spannungsbereich mittels Vorwiderstand (oben) oder Spannungsteiler (unten)

Bei zu kleiner Spannung ist ein Meßverstärker, z.B. Operationsverstärker in Elektrometerschaltung (s.dort) einzusetzen. Der Meßbereich wird manuell oder automatisch eingestellt. Die zusätzlichen Widerstände sind oft im Meßgerät integriert und können stufig,

meist in 1/2/5-Stufung eingestellt werden. Es können aber auch durch externe Beschaltungen Anpassungen vorgenommen werden.

Wichtig: Um Schädigungen des Meßwerks zu vermeiden ist zunächst ein geeignetes Meßgerät auszuwählen und ggf. mit zus. Vorwiderständen zu versehen. Die Messung sollte mit dem höchsten Meßbereich beginnen. Der Meßbereich ist dann stufenweise solange zu reduzieren bis eine Anzeige möglichst nahe am Vollausschlag liegt. Dadurch wird mit dem kleinstmöglichen Fehler gemessen, da die Geräteklassen sich stets auf den Meßbereich, bzw. Vollausschlag beziehen.

2.2.2.2 Gleichstrommessung

Strommessungen müssen definitionsgemäß in einem Leitungspfad erfolgen. Dazu muß ein bestehender Leitungspfad unterbrochen und in die Unterbrechung das Meßgerät eingeschleift werden (Bild 49 oben).

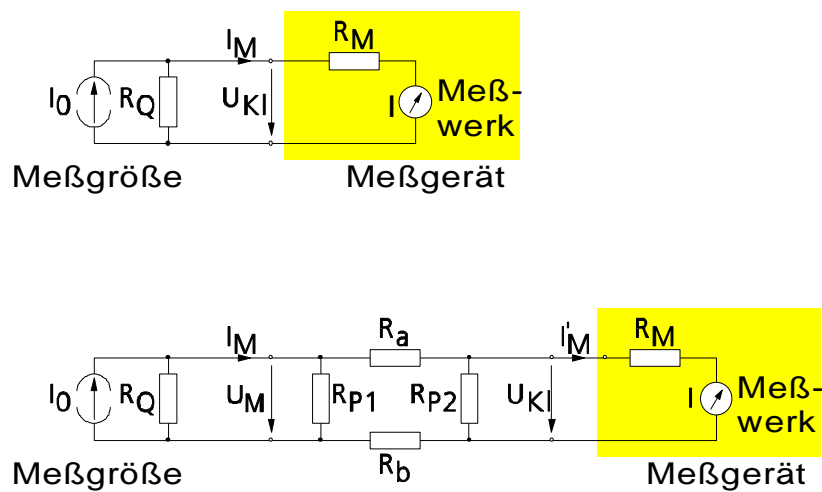


Bild 49: Strommessung ohne (oben) und mit (unten) widerstandsbehafteten Leitungen

Bedingt durch den Widerstand des Strommessgeräts erhöht sich der gesamte Widerstand in dem Stromkreis, was eine Verfälschung des Meßgrößenwertes zur Folge haben kann, d.h. das Meßgerät wirkt auf die Meßgröße zurück. Hieraus leitet sich die Forderung ab, daß der Meßwiderstand R_M möglichst niederohmig sein soll.

In der Realität ist zwischen dem Abgriff (Meßpunkte an der Unterbrechungsstelle) und dem Meßgerät ein Leitungspaar (Bild 49 unten) vorhanden. Parallel zum R_M können Isolationswiderstände (R_{p1} , R_{p2}) das Meßergebnis systematisch, aber oft undefiniert, verfälschen. Der das Meßgerät durchfließende Strom I'_M entspricht dann nicht mehr dem gesuchten Strom I_M (Meßgröße). Die Herleitung der Zusammenhänge läßt sich anhand der Stromteilerformeln, analog der Spannungsmessung (Gln.(154),(155)) durchführen.

Es ergibt sich also die Forderung

$$R_M \ll R_{p1}; R_{p2} \tag{157}$$

Beispiel: Drehspulinstrument. Die Spule bringt den maximalen Vollausschlag des Zeigers bereits im Milliamperebereich. Für Messungen im Amperebereich muß das Strommeßgerät im

Meßbereich (mA) an den Wertebereich der Meßgröße (A) angepaßt werden. Dies kann durch einen Parallelwiderstand, auch Nebenwiderstand oder Shunt genannt, erfolgen (Bild 50).

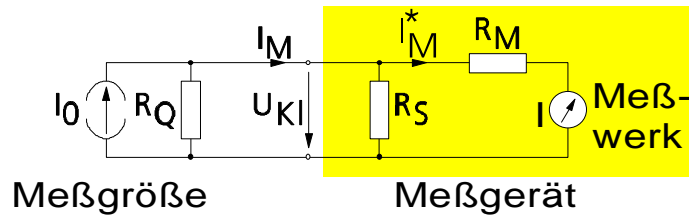


Bild 50: Strommessung mit Nebenwiderstand R_S (Shunt)

Es gilt dann

$$\left. \begin{aligned} U_{KI} &= R_S(I_M - I_M^*) \\ U_{KI} &= R_M I_M^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{I_M^*}{I_M} = \frac{R_S}{R_S + R_M} \quad (158)$$

Nebenwiderstände sind häufig in Meßgeräten integriert und können stufig, meist in 1/2/5-Stufung eingestellt werden. Es können aber auch durch externe Beschaltungen Anpassungen vorgenommen werden.

Bei Stromkreisen, die nur geringfügige zusätzlich eingeschleifte Widerstände zulassen, können nur sehr kleine Shuntwiderstände verwendet werden. In diesem Fall ist der Spannungsabfall mittels eines Differenzverstärkers (s. Operationsverstärker) abzugreifen. Hier ist dann die Strommessung über den Shuntwiderstand auf eine Spannungsmessung zurückgeführt.

Für präzise Messungen, insbesondere bei großen Strömen, werden häufig separate Nebenwiderstände (Shunts) eingesetzt. Diese weisen jeweils getrennte Anschlüsse für den Strompfad und den Meßabgriff, also insgesamt vier Anschlüsse auf (Bild 51 rechts oben).

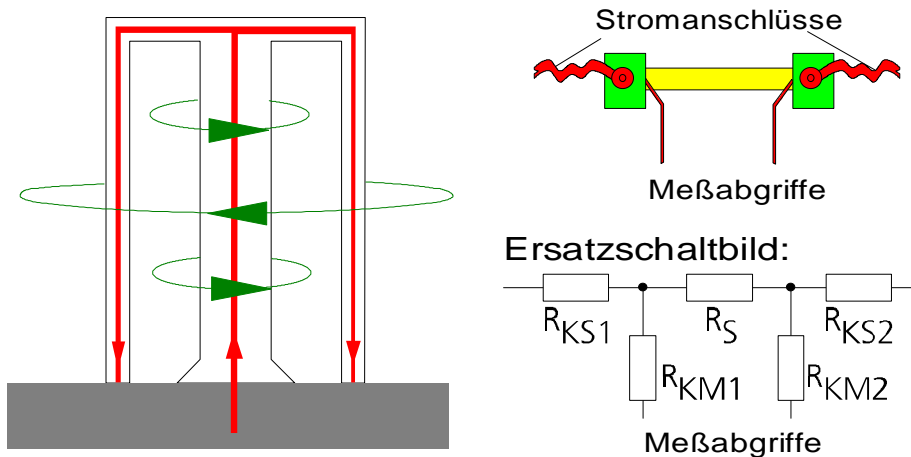


Bild 51: Bauformen von Nebenwiderständen (Shunts): links: induktivitätsarmer Shunt; rechts: Shunt mit getrennten Strom- und Spannungsabgriffen

Durch diese Technik wird vermieden, daß Spannungsabfälle an Kontaktwiderständen in das Meßergebnis eingehen (Bild 51 rechts unten), da Spannungsabfälle über R_{KS1} , bzw. R_{KS2} nicht auf den als Spannungsabfall über dem Shuntwiderstand R_S gemessenen Wert eingehen. Da

der Strom über das Meßgerät klein ist, können auch Spannungsabfälle über den Kontaktwiderständen R_{KM1} und R_{KM2} als klein angesehen werden. Die genauen Einflüsse der Kontaktwiderstände lassen sich auch hier wieder über die Strom- und Spannungsteilerzusammenhänge ermitteln.

Für Ströme, die sich zeitlich rasch ändern, können parasitäre Induktivitäten das Meßergebnis verfälschen. Solche Probleme ergeben sich beim Messen von pulsförmigen Strömen. Hierfür lassen sich Shunts in koaxialer Bauweise (Bild 51 links) einsetzen, die, aufgrund der sich kompensierenden Magnetfelder, eine stark verminderte Induktivität aufweisen. Solche Shunts können, wie bereits diskutiert, natürlich auch über vier Anschlüsse verfügen.

2.2.3 Wechselspannungs- und Wechselstrommessung

Lernziel: Was sind Wechselstromgrößen? Unterschiede und Probleme beim Messen von sinusförmigen Größen.

2.2.3.1 Wechselstromgrößen

Von Wechselstrom/-spannung sprechen wir, wenn eine Strom/Spannung von zeitlich sinusförmigem Verlauf vorliegt (Bild 52):

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{159}$$

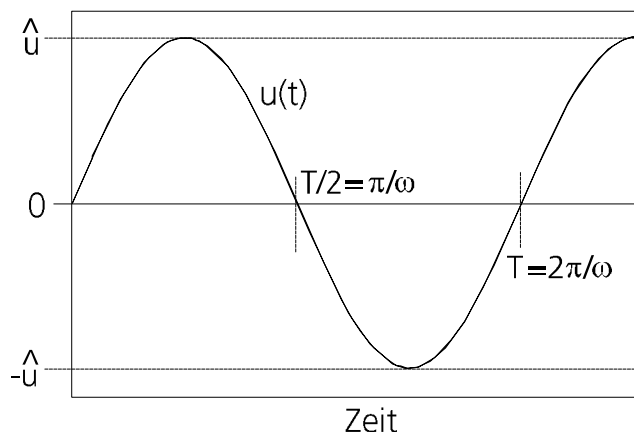


Bild 52: Zeitlicher Verlauf einer Wechselspannung $u(t)$

Dabei wird \hat{u} als Amplitude, hier Spannungsamplitude, oder Spitzenwert, ω als Kreisfrequenz (gemessen in s^{-1}), mit dem Zusammenhang zur Schwingungshäufigkeit f (gemessen in Hertz (Hz))

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{160}$$

beziehungsweise der Periodenlänge T (gemessen in s), sowie der Phasenlage φ , bezeichnet.

Als Spitze-Spitze-Wert wird

$$U_{SS} = \hat{u} - (-\hat{u}) = 2\hat{u} \tag{161}$$

bezeichnet.

2.2.3.2 Zeitlicher Mittelwert bei periodischen Signalen

Der zeitliche Mittelwert \bar{u} einer periodischen Größe der Periodenlänge T , hier z.B. der Wechselspannung $u(t)$, wird durch die Definitionsgleichung

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \tag{162}$$

ermittelt. D.h. der Mittelwert "spannt" über dem Zeitraum $0..T$ eine Rechteckfläche der Höhe \bar{u} auf, die gleich groß ist, wie die im gleichen Zeitraum aufgespannte Fläche durch $u(t)$. Diese Definitionsgleichung Gl.(162) gilt natürlich auch entsprechend für andere Größen, wie z.B. einen Wechselstrom $i(t)$. Informationen, wie z.B. Signalverlauf oder Phasenlage, sind diesem Kennwert nicht mehr zu entnehmen.

Wird das Integral über die Zeit $t=0..T$ in Gl.(162) durch n Rechtecke der Breite τ und der Höhe $u(t=i\tau)$ approximiert, wobei i das i -te Rechteck bedeutet, dann erhalten wir für den Zeitmittelwert eine Näherung:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n u_i \tau = \frac{\tau}{n\tau} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \tag{163}$$

wobei $T = n \cdot \tau$ und $u_i = u(t)$ für $t = i \cdot \tau$. Für $n \rightarrow \infty$ geht Gl.(163) in Gl.(162) über, so daß die Näherung dem Zeitmittelwert entspricht. Diese Form der näherungsweise Berechnung von Zeitmittelwerten bietet sich bei rechnergestützten Meßgeräten an, bei denen "Abtastwerte" (s. AD-Wandlung) vorliegen. Ist die Periodenlänge T unbestimmt, dann stellt sich u.U. bei falsch gewähltem τ ein zusätzlicher Fehler ein, da das letzte Rechteck zu groß oder zu klein sein kann. Mit wachsendem n nimmt dieser Fehler aber ab.

Bei rein sinusförmigen Verläufen ergibt sich, wie mittels Gl.(162) errechnet werden kann, als zeitlicher Mittelwert der Wert Null. Für o.a. Wechselstromgrößen mit solchem Verlauf ist der zeitliche Mittelwert daher nicht aussagekräftig.

2.2.3.3 Effektivwert bei periodischen Signalen

Zum Vergleichen der Wirkung eines Wechselstroms mit der Wirkung eines Gleichstroms wurde der Effektivwert eingeführt. Er ist ein "Kennwert", der einem Gleichstrom, bzw. einer Gleichspannung entspricht, der/die an einem ohmschen Widerstand die gleiche Energie umsetzt, wie der Wechselstrom/die Wechselspannung in der gleichen Zeit. Dies gilt sowohl für rein sinusförmige, wie auch für alle anderen periodischen Zeitverläufe.

Für die Leistung P_{gl} der Gleichspannung U_{eff} an einem ohmschen Widerstand R z.B. gilt

$$P_{gl} = \frac{U_{eff}^2}{R} \tag{164}$$

und damit für die Energie E_{gl} im Zeitraum t_1 bis t_2

$$E_{gl} = \int_{t_1}^{t_2} P_{gl} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U_{eff}^2}{R} dt = \frac{U_{eff}^2}{R} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{U_{eff}^2}{R} (t_2 - t_1). \tag{165}$$

Für die Leistung $P_{wechsel}$ der Wechselspannung $u(t)$ der Periodenlänge T , an dem gleich großen Widerstand R gilt ebenso wie Gl.(164)

$$P_{wechsel} = \frac{u^2(t)}{R} \quad (166)$$

und damit für die Energie $E_{wechsel}$ im Zeitraum $t=0$ bis $t=T$

$$E_{wechsel} = \int_0^T P_{wechsel} dt = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt \quad (167)$$

Per Definition gilt nun $E_{wechsel}=E_{gl}$ und damit ergibt sich bei gleichem Zeitraum, also $t_1=0$ bis $t_2=T$

$$\frac{U_{eff}^2}{R}(T-0) = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt \quad (168)$$

umgestellt nach dem zu bestimmenden Kennwert U_{eff} erhalten wir

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (169)$$

als Definitionsgleichung² für den Effektivwert einer Wechselspannung, bzw. o.E.d.A. für jedes periodische Spannungssignal der Periodenlänge T . Gleiches gilt natürlich für jede andere periodische Größe, wie z.B. beim Wechselstrom $i(t)$. Informationen, wie z.B. Signalverlauf oder Phasenlage, sind diesem Kennwert nicht mehr zu entnehmen.

Wie in Gl.(163) können wir das Integral über die Zeit $t=0..T$ in Gl.(169) durch n Rechtecke der Breite τ und, hier, der Höhe $u^2(t=i\tau)$ approximieren, wobei i das i -te Rechteck bedeutet. Dann erhalten wir für den Effektivwert eine Näherung:

$$\tilde{U}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (170)$$

wobei $u_i = u(t=i \cdot \tau)$ und $T = n \cdot \tau$. Für $n \rightarrow \infty$ geht Gl.(170) in Gl.(169) über, so daß die Näherung dem Effektivwert entspricht. Diese Form der näherungsweise Berechnung von Effektivwerten bietet sich bei rechnergestützten Meßgeräten an, bei denen "Abtastwerte" (s. AD-Wandlung) vorliegen. Ist die Periodenlänge T unbestimmt, dann stellt sich u.U. bei falsch gewähltem τ ein zusätzlicher Fehler ein, da das letzte Rechteck zu groß oder zu klein sein kann. Mit wachsendem n nimmt dieser Fehler aber ab. Es kann auch der Mittelwert über mehrere Periodenlängen ermittelt werden, was die Meßzeit zwar erhöht, dafür aber Fehler aufgrund nicht exakt getroffenen Periodenlängen T minimiert, da n vergrößert wurde.

Bei rein sinusförmigem Verlauf (Gl.(159)) können wir Gl.(169) direkt auswerten:

² Im engl. Sprachgebrauch wird der Effektivwert als RMS-Value, also z.B. V_{RMS} oder V_{rms} bezeichnet. Hinter der Abkürzung RMS finden wir die Elemente der Definitionsgleichung (169) "Root-Mean-Square", also "Wurzel aus Mittelwert über dem Quadrat" wieder.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (171)$$

2.2.3.4 Messen des Effektivwerts

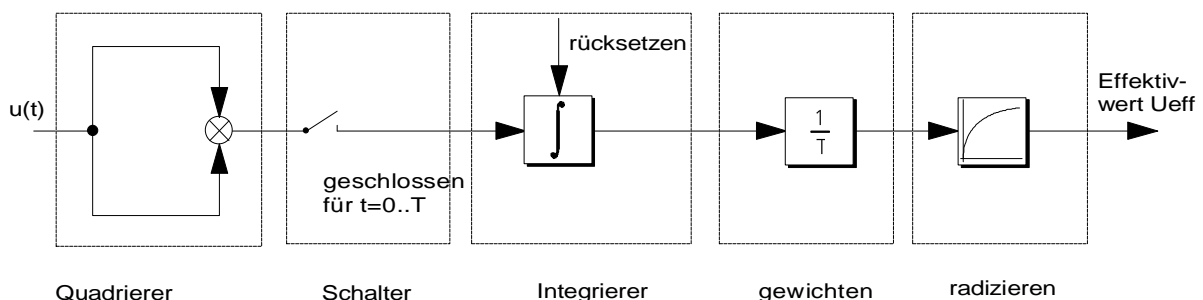
Als Kennwert für Wechselstromgrößen, insbesondere sinusförmige Größen, wie wir sie bereits diskutiert haben, ist besonders der Effektivwert geeignet. Hier ist praktisch der gesamte Verlauf eines Periodischen Signals auf einen Meßwert reduziert. Wenn die Informationen über den Signalverlauf oder die Phasenlage ermittelt werden müssen, dann reicht der Effektivwert nicht aus. In diesem Fall ist. u.U. eine vollständige Signalbeobachtung, z.B. mittels Oszilloskop (s.dort) erforderlich.

Zum Messen des Effektivwerts stehen eine Reihe von Verfahren zur Verfügung, die nachfolgend erörtert werden.

Auswerten der Definitionsgleichung

Eine exakte Bestimmung des Effektivwertes läßt sich mittels Komponenten durchführen, die ein Signal $u(t)$ streng nach der Definitionsgleichung Gl.(169) aufbereiten (Bild 53).

Hier liegt immer nach Ablauf einer Periode ein neuer Meßwert vor, die Messung erfolgt also diskontinuierlich. Es liegt dann im wesentlichen eine Kettenstruktur vor, bestehend aus Funktionsblöcken mit der Folge des Signaldurchlaufs (Beispiel: $u(t)$ sei eine Spannung):



1. quadrieren: realisiert z.B. mittels elektronischem (Einquadranten-) Multiplizierer oder Übertragungsglied mit quadratischer Kennlinie. Hinweis: Hier ergäbe sich als Ausgangsgröße die Einheit einer Spannung im Quadrat. Der Multiplizierer verfügt zusätzlich über einen Beiwert, der die Einheit wieder auf eine Spannungseinheit korrigiert.

Bild 53: Bestimmung des Effektivwertes nach der Definitionsgleichung

1. Schalter: bildet das Zeitfenster $t=0..T$; realisiert z.B. mittels Transmissionsgate oder FET in Verbindung mit einer Steuerung.
2. Integrierer: wertet das Integral aus; realisiert mittels elektronischem Integrierer, z.B. mittels Operationsverstärker. Dieser Funktionsblock ist praktisch i.d.R. mit der Gewichtung zusammengefaßt. Vor jeder Messung muß der Wert des Integrierers (Anfangswert) mittels einer Steuerung auf Null gesetzt werden.

3. gewichten: bildet den Faktor $1/T$, im einfachsten Fall realisiert durch einen Spannungsteiler. Hinweis: Das Signal aus dem Integrierer ist theoretisch mit der Einheit Spannung*Zeit versehen, so daß sich mittels der Gewichtung $1/T$, Einheit $1/\text{Zeit}$, wieder eine Spannung ergibt. Der Funktionsblock "gewichten" ist meist als Integratorkonstante (vgl. Integrierer) im Funktionsblock "Integrierer" enthalten.
4. radizieren: bildet den Effektivwert in der Einheit einer Spannung. D.h. der Radizierer muß mit einem einheitenbereinigenden Übertragungsfaktor versehen sein. Realisierungen sind möglich durch
 - a) Dioden-Widerstandsnetzwerke oder
 - b) aktive elektronische Schaltungen (Operationsverstärker).

Da der Meßablauf diskontinuierlich ist, ist eine Steuerung in Form eines Steuerwerks erforderlich, mit den Aufgaben a) schließen des Schalters für genau eine Periodendauer, b) zurücksetzen des Integrierers vor jeder Messung und c) Signalisierung, wenn das Ergebnis bereitsteht. Da sich der Meßablauf an der Periodenlänge des Signals orientiert, ist ein wesentlicher Bestandteil der Steuerung die Ermittlung des Start- und Stopzeitpunktes für die Integration. Dies kann z.B. auf folgende Arten durchgeführt werden:

- Zu dem Meßsignal liegt ein Referenzsignal vor, z.B. in Form eines Rechteckpulses, der genau die Start- und Stopzeiten beschreibt.
- Die Start- und Stopzeit wird über eine Triggerfunktion (s. Oszilloskop) aus dem Signal $u(t)$ gewonnen. Dabei ist wichtig, daß ein eindeutiger Signalwert innerhalb der Periodenlänge, möglichst auch mit der zugehörigen Flankeneigenschaft, benutzt wird. Dieser Signalwert und seine Flanke müssen genau mit der Periodenlänge T wiederkehren. Nulldurchgänge wären denkbar, sind aber oft nicht eindeutig.

Es kann auch der Effektivwert über mehrere Periodenlängen ermittelt werden, was die Meßzeit zwar erhöht, dafür aber Fehler aufgrund nicht exakt getroffenen Periodenlängen T minimiert. Das oben beschriebene Verfahren findet sich gelegentlich in sog. "True-RMS-Meßgeräten" (=wahrer Effektivwertmesser) wieder. Heute wird der Effektivwert aber häufig durch digitale Signalverarbeitung gewonnen.

Digitale Signalverarbeitung

Liegen äquidistante Stützstellen eines Signalverlaufes $u(t)$ vor, z.B. durch Umwandlung mittels AD-Wandler, also

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ mit } u_j = u(i \cdot \tau), \quad (172)$$

dann läßt sich eine Näherung für den Effektivwert nach Gl.(170) ermitteln.

In der Praxis wird die Realisierung durch AD-Wandlung erreicht. Die Meßwerte, z.B. einer Spannung liegen dann als codierte Zahl, z.B. Binärzahl, vor. Diese Zahl ist stets einheitenbereinigt, also einheitenfrei, da sie auf eine Referenzgröße, wie beispielsweise eine Referenzspannung, bezogen ist (siehe AD-Wandler). Diese Wertefolge läßt sich dann leicht formal nach Gl.(170) mittels eines Rechners auswerten. Der gewonnenene Effektivwert bezieht sich dann natürlich auch auf die Referenzgröße und erfährt durch ihn wieder eine Einheit, z.B. Volt.

Die Festsetzung des Start- und des Stopwertes erfolgt nach den gleichen Kriterien, wie im vorhergenannten Verfahren. Dabei kann die "Triggerung" analog, also aus dem Signal $u(t)$ vor der AD-Wandlung oder in der Zahlenfolge u_i erfolgen. Es kann auch der Effektivwert über mehrere Periodenlängen ermittelt werden, was die Meßzeit und den Rechenaufwand zwar erhöht, dafür aber Fehler aufgrund nicht exakt getroffenen Periodenlängen T minimiert.

Dreheisenmeßwerk

Ein klassisches Instrument zur Effektivwertmessung ist das Dreheiseninstrument (Bild 43). Es ist ein mechanisches Zeigerinstrument, das aufgrund seiner Trägheit eine Mittelung durchführt, wie auch das Drehspulinstrument. Wie aber bereits gezeigt wurde, ist das vom Meßstrom I hervorgerufene Drehmoment, das zu dem Zeigerausschlag führt, polaritätsunabhängig.

Zur Beurteilung, ob der Effektivwert des Wechselstroms gemessen wird, betrachten wir die Kraftwirkung F zwischen beweglichem und feststehendem Kern (Bild 43)[28]. Die magnetisch gespeicherte Energie ergibt sich allgemein zu [29]

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \tag{173}$$

wobei L die Induktivität der Meßspule und I der Meßstrom ist. Die Kraft läßt sich aus dem allgemeinen Ansatz

$$E_M = \int F_M(s) ds \tag{174}$$

berechnen, wobei s der Weg des einen Kerns und F_M die Magnetkraft sein soll. Damit erhalten wir für die Magnetkraft F_M aus Gl.(173)

$$F_M = \frac{dE_M}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{ds} \cdot I^2. \tag{175}$$

Die Magnetkraft bewirkt eine Auslenkung s des Zeigers gegen die Rückstellfeder mit dem Zusammenhang

$$F_F = c \cdot s, \tag{176}$$

bis beide Kräfte (Gln.(175)-(176)) im Gleichgewicht stehen. Dann erhalten wir für den Zeigerausschlag α , der über den Getriebefaktor k mit der Auslenkung verknüpft sei,

$$\alpha = k \cdot s = \frac{k}{2c} \cdot \frac{dL}{ds} \cdot I^2 = f(I^2).$$

Wenn die Kerne geeignet gestaltet sind, läßt sich ein konstantes dL/ds erreichen. Dann wird durch die Trägheit des mechanischen Meßwerks der Mittelwert über dem Quadrat des Stromes gebildet. Die Auswertung folgt demnach der Definitionsgleichung Gl.(169) des Effektivwertes.

Durch die Spule mit Eisenkern werden Wirbelströme gebildet. Das Instrument ist daher nur für niederfrequente Wechselströme (bis einige 100Hz) geeignet. Außerdem verfügt es über einen relativ hohen Energiebedarf.

Hitzdrahtinstrument

Da nach der Definition der Effektivwert einer Wechselspannung einer Gleichspannung entspricht, die an einem Widerstand die gleiche Leistung umsetzt, kann über diesen Leistungsansatz ebenfalls ein Lösungsansatz gefunden werden. Es spielt also keine Rolle, ob in einem Widerstand R eine Gleichspannung U_{eff} oder eine Wechselspannung $u(t)$ mit dem Effektivwert U_{eff} einen Leistungsumsatz bewirkt. In beiden Fällen erfolgt eine gleich große Erwärmung.

Liegt der Widerstand als Draht vor, bewirkt die Erwärmung eine Längenausdehnung, welche über ein Getriebe zu einem Zeigerausschlag führt, der direkt vom Effektivwert abhängig ist. Die Rückstellung erfolgt durch Abkühlung.

Hitzdrahtinstrumente sind aufgrund des thermischen Wirkungsprinzips sehr träge und benötigen vergleichsweise viel Energie aus der Meßgröße. Dafür können sie sehr hochfrequente Ströme messen, was bei den voran diskutierten Verfahren nur mit großem Aufwand möglich ist. Sie müssen außerdem vor der Messung eine Nullpunktseinstellung erfahren.

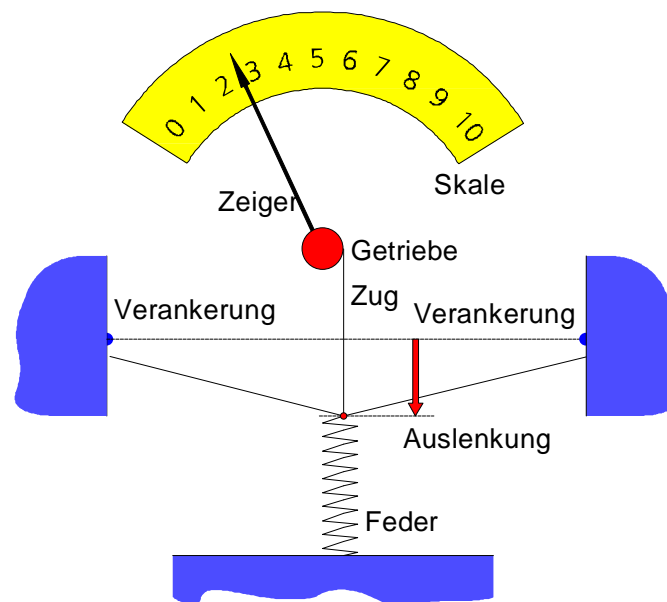


Bild 54: Prinzip eines Hitzdrahtinstrumentes zur Effektivwertmessung

Thermoinstrumente

Sie bestehen aus einer Kombination von einem Thermoelement und einem Gleichspannungsmesser, z.B. Drehspulinstrument. Mit ihm können Gleich- und Wechselströme gemessen werden [32].

Ein Thermoelement (Berührungspunkt von zwei unterschiedlichen Metallen mit unterschiedlicher thermoelektrischer Spannung) wird durch den Meßstrom über ein Heizelement proportional zum Effektivwert erwärmt. Die Thermospannung am Thermoelement wird durch das Drehspulinstrument gemessen.

Zur Kompensation der Umgebungstemperatur wird auch ein zweites Thermoelement benutzt, welches vom Meßstrom unbeeinflusst bleibt. Als Meßspannung für das

Drehspulinstrument wird dann die Differenz zwischen der Spannung des erwärmten und des unbeeinflussten Thermoelements abgegriffen.

Solche Instrumente sind sehr energiebedürftig und werden daher vorwiegend, auch aufgrund ihrer robusten Bauweise, für große Ströme im Bereich 0,5..60A eingesetzt [32].

Gleichrichtung

Die gebräuchlichste Art den "Effektivwert" zu Messen ist die ersatzweise, weil einfachere Messung eines gleichgerichteten Signals (Bild 55). Über die Zeit kann dann mit einem normalen, mittelwertbildenden Instrument, wie beispielsweise einem Drehspulinstrument, gemessen werden. Wir erhalten dann eine Ersatzgröße, die - wie weiter unten noch ausgeführt - in einem festen Zusammenhang zum Effektivwert steht, allerdings nur für eine bestimmte Signalform! Eine reine Mittelwertmessung scheidet aus, da sich bei sinusförmigen Größen der Anzeigewert Null ergäbe (Gl.(162)).

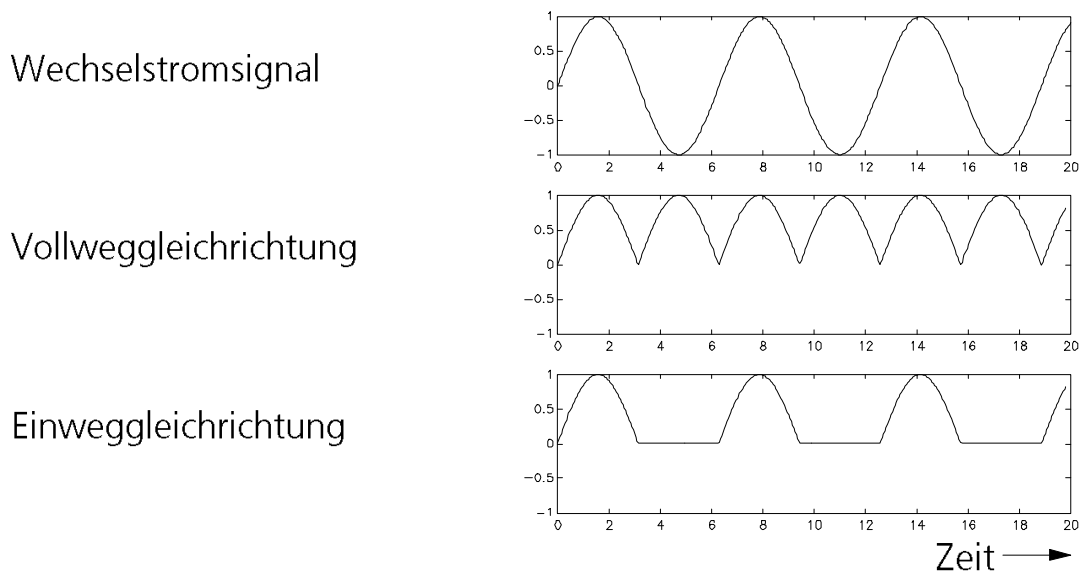


Bild 55: Zeitverläufe von auf verschiedene Arten gleichrichtete Sinussignale; oben: ursprüngliches Signal; unten: einweggleichgerichtetes Signal; mitte: vollweggleichgerichtetes Signal

Ziel der Gleichrichtung ist daher, das Signal so umzuformen, daß über einfache Mittelwertbildung ein Kennwert für den Wechselstrom erhältlich ist. Mittels Gleichrichterschaltungen können zwei Lösungen erzielt werden:

- Einweggleichrichtung: Es wird nur eine, z.B. die positive Halbwelle innerhalb einer Periode ausgewertet (Bild 55 unten). Dies kann mit einer einfachen Gleichrichterschaltung erzielt werden (Bild 56 links).
- Vollweggleichrichtung: Es werden beide Halbwellen als Betrag ausgewertet (Bild 55 mitte). Der Vorteil ist ein höherer Signalpegel und damit mehr Energie für das abgreifende Meßgerät. Das Signal ist auch "glatter" und muß nicht mehr so stark gemittelt ("geglättet") werden. Realisierbar ist die Vollweggleichrichtung, auch Zweiweggleichrichtung genannt, beispielsweise mittels einer Gleichrichterbrückenschaltung, auch Graetzschaltung genannt (Bild 56 rechts).

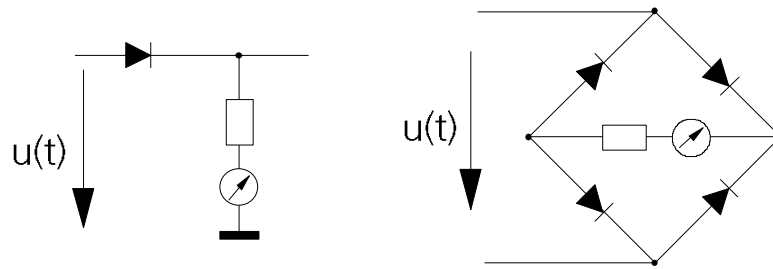


Bild 56: Gleichrichterschaltungen; links: Einweggleichrichter; rechts: Vollweggleichrichter

Betrachten wir eine rein sinusförmige Größe, wie z.B. die Spannung nach Gl.(159) (zur Vereinfachung sei $\varphi=0$) und werten für die beiden Fälle den Mittelwert nach Gl.(162) aus. Wir erhalten dann als Kennwert (Anzeige) für die Einweggleichrichtung

$$U_{EGL} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u} \cdot \sin(\omega t) dt = \frac{\hat{u}}{\pi} \quad (177)$$

und für die Vollweggleichrichtung

$$U_{VGL} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u} \cdot \sin(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \hat{u} \cdot \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \hat{u} = 2 \cdot U_{EGL} \quad (178)$$

Bei der Vollweggleichrichtung ist der Anzeigewert damit doppelt so groß, wie bei der Einweggleichrichtung.

Da die Mittelung nicht über den Quadratwert erfolgt, kann dies nicht der Effektivwert sein. Bei rein sinusförmigen Größen müssen U_{EGL} und U_{VGL} aber in einem festen Zusammenhang zum Effektivwert stehen. Vergleichen wir zum Beispiel das Ergebnis bei Vollweggleichrichtung (Gl.(178)) mit dem wahren Effektivwert eines reinen Sinussignals (Gl.(171)), indem wir beide Gleichungen nach \hat{u} auflösen und gleichsetzen:

$$U_{eff} \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} U_{VGL} \Rightarrow U_{eff} = \underbrace{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}_{\text{Korrekturfaktor}} \cdot U_{VGL} \quad (179)$$

Effektivwert und Anzeigewert sind somit über den Formfaktor (Korrekturfaktor) miteinander verknüpft. Der Wert liegt für rein sinusförmige Wechselspannungen bei ca. 1,11. I.allg. wird das bei Zeigerinstrumenten durch zwei Skalen berücksichtigt. Z.B. eine rote Skala für Wechselstrommessung und eine schwarze Skala für Gleichstrommessung. Die Gleichrichtwerte werden als Ersatzgrößen für den Effektivwert benutzt.

Weiterhin ist zu beachten, daß durch die Schleusenspannung der Gleichrichter U_s ein zusätzlicher Spannungsabfall entsteht, der das Meßergebnis verfälscht. Bei Siliziumgleichrichtern ist U_s ca. 0,7 V, bei Germaniumgleichrichtern ca. 0,3 V. Dieser quasi konstante Spannungsabfall muß in der Skalierung ebenfalls berücksichtigt werden. Die Schleusenpannung kann aus dem Meßergebnis entfernt werden, wenn aktive Gleichrichterschaltungen, z.B. mittels Operationsverstärker (sog. Präzisionsgleichrichter (s.dort) [36][37]), eingesetzt werden.

2.2.4 Leistungsmessung

Lernziel: Begriffe der elektrischen Leistung: Wirk-, Blind, Scheinleistung; Verfahren zur Leistungsmessung

2.2.4.1 Betrachtungen zur Leistungsmessung

Die elektrische Leistung an einem Zweipol ist definiert durch

$$P = U \cdot I, \tag{180}$$

wobei U der Spannungsabfall über dem Zweipol infolge des Gleichstroms I ist. P wird elektrisch vom Zweipol aufgenommen und i.d.R., z.B. bei ohmschem Widerstand, in eine andere Energieform (Wärme) umgesetzt. Gemessen wird die Leistung in der Einheit Watt [W]. Der Zusammenhang zur Energie ist über Gl.(145) hergestellt. Die elektrische Energie, gemessen in [Ws] entspricht der kalorischen Energie, gemessen in [J] oder der mechanischen Energie, gemessen in [Nm] (s. Definition).

Bei **Gleichstromnetzen** läßt sich die aufgenommene Leistung daher leicht auf eine Strom-Spannungsmessung zurückführen. D.h. mit getrennten Meßgeräten für Strom und Spannung wird **gleichzeitig** gemessen und gemäß Gl.(180) die Leistung berechnet.

In **Wechselstromnetzen** ist die Meßaufgabe nicht mehr so leicht lösbar. Zwar gilt hier immer noch die Definition nach Gl.(180), aber die Spannung und der Strom sind jetzt zeitveränderliche Größen. Wir erhalten die **Momentanleistung** nach

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{181}$$

Speziell für Wechselstromnetze mit sinusförmigen Signalen (Gl.(159)) gilt [39][43]

$$p(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_U) \cdot \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_I) = \hat{u}\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_U) \sin(\omega t + \varphi_I) \tag{182}$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{\hat{u}\hat{i}}{2} \cos(\varphi_U - \varphi_I)}_{\substack{\bar{P} \\ \text{zeitlich konstant, } f(\varphi_U, \varphi_I)}} - \underbrace{\frac{\hat{u}\hat{i}}{2} \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}_{\substack{\hat{p} \\ \text{zeitabhängig}}} \tag{183}$$

Da sich aufgrund der phasenschiebenden Wirkung von Wechselstromwiderständen nahezu beliebige Phasenlagen zwischen Spannung und Strom ($\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I$) einstellen können, ergeben sich sehr unterschiedliche Leistungsbilanzen. Die zeitlich veränderliche Leistung p(t) läßt sich nach Gl.(183) in einen zeitlich konstanten Teil \bar{P} und einen zeitlich veränderlichen Teil zerlegen. Der zeitlich unveränderliche Teil wird durch die Phasenlage zwischen Spannung und Strom beschrieben. \bar{P} ist der zeitliche Mittelwert von p(t). Er wird am größten, wenn $\Delta\varphi = 0$ ist. Der zeitlich veränderliche Teil wird durch eine Cosinusfunktion doppelter Frequenz beschrieben, deren Mittelwert gleich Null ist.

Betrachten wir die Leistungen an unterschiedlichen Verbrauchern etwas genauer und zwar für die Fälle ohmscher Verbraucher (Widerstand), Induktivität und Kapazität.

Beim **ohmschen Verbraucher** ist $\Delta\varphi = 0$, d.h. Spannung und Strom haben die gleiche Phasenlage (Bild 57). Bei einer Spannung von $U_{\text{eff}} = 1\text{V}$ und einem Strom von $I_{\text{eff}} = 1\text{A}$ stellt sich erwartungsgemäß nach Gl.(183) eine mittlere Leistung von 1W ein, so wie sie auch bei der

Definition der Effektivwerte festgelegt wurde. Die Spitzenwerte der elektrischen Leistung betragen 2W und zwar immer dann, wenn die Spannung gleichzeitig mit dem in Phase liegenden Strom ihre positiven, bzw. negativen Spitzenwerte erreichen, also zweimal je Periode (doppelte Frequenz!):

$$p_{\max} = u_{\max} \cdot i_{\max} = 1V \cdot \sqrt{2} \cdot 1A \cdot \sqrt{2} = 2W$$

Das Vorzeichen ist hier immer positiv, weil Strom und Spannung stets das gleiche Vorzeichen haben.

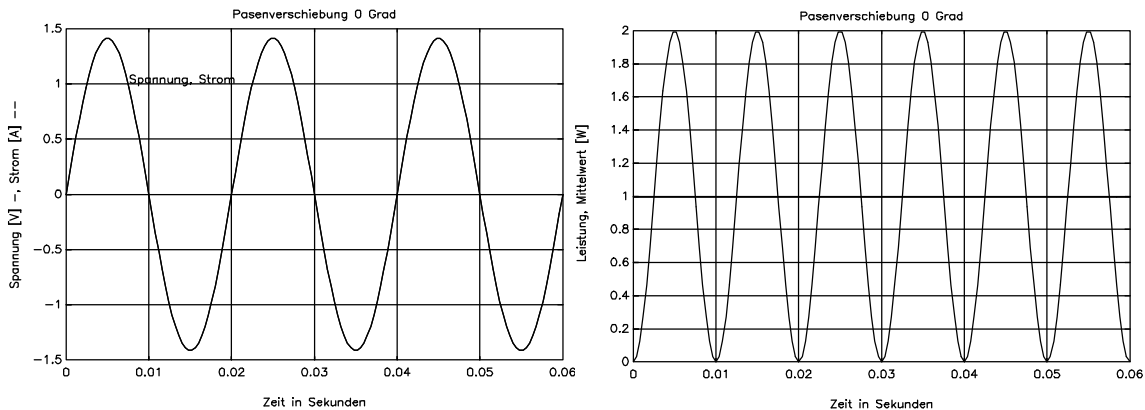


Bild 57: Elektrische Leistungsaufnahme und deren Mittelwert (rechts) an einem ohmschen Widerstand bei sinusförmigem Wechselstrom/-spannung (links) gleicher Phase, mit $U_{\text{eff}}=1V$ und $I_{\text{eff}}=1A$.

Bei einem **rein kapazitiven Verbraucher** (Kondensator) eilt die Spannung dem Strom um 90° nach, d.h. $\Delta\phi = \phi_u - \phi_i = -90^\circ$ (Bild 58), oder der Strom "eilt" der Spannung um 90° vor. Werten wir Gl.(183) aus, dann erhalten wir einen Leistungsmittelwert von 0 wegen $\cos(-90^\circ)=0$. Es verbleibt nur der Wechselanteil mit positiven und negativen Halbwellen. Innerhalb einer Spannungsperiode "nimmt" der Kondensator zweimal Leistung auf, speichert sie im elektrischen Feld und "gibt" sie zweimal wieder zurück.

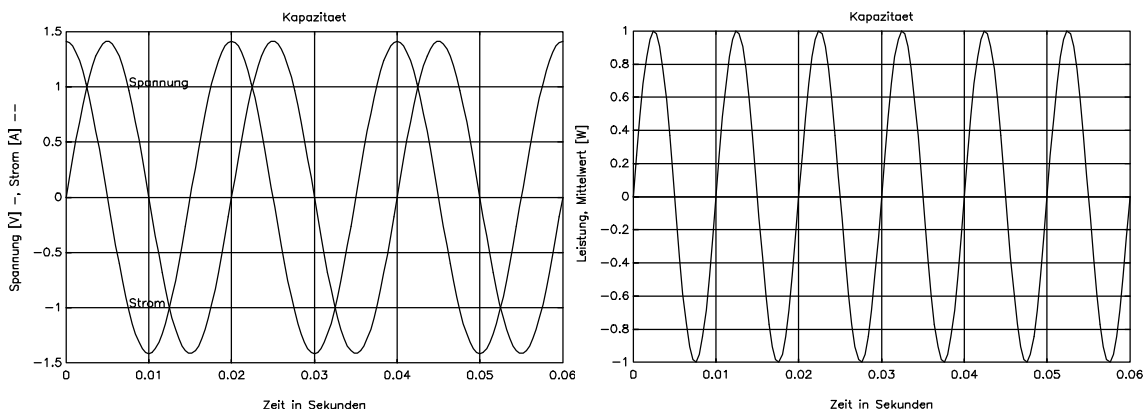


Bild 58: Elektrische Leistungsaufnahme und deren Mittelwert (rechts) an einem kapazitiven Widerstand bei sinusförmigem Wechselstrom/-spannung (links) mit -90° Phasedifferenz und $U_{\text{eff}}=1V$, $I_{\text{eff}}=1A$.

Bei einem **rein induktiven Verbraucher** (Induktivität) eilt die Spannung dem Strom um 90° vor, d.h. $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = +90^\circ$ (Bild 59), oder der Strom "eilt" der Spannung um 90° nach. Werten wir Gl.(183) aus, dann erhalten wir, wegen $\cos(+90^\circ) = 0$, einen Leistungsmittelwert von 0. Es verbleibt nur der Wechselanteil mit positiven und negativen Halbwellen. Innerhalb einer Spannungsperiode "nimmt" die Induktivität zwei mal Leistung auf, speichert sie im Magnetfeld und "gibt" sie zwei mal wieder zurück

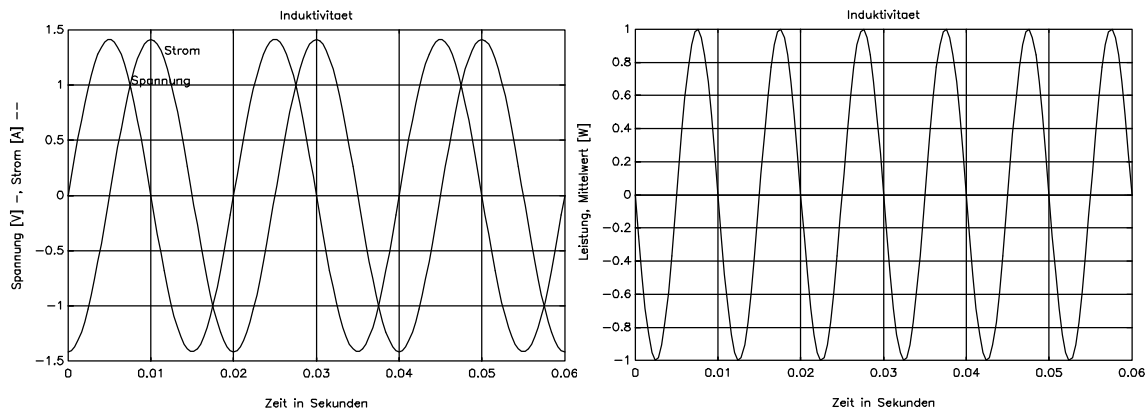


Bild 59: Elektrische Leistungsaufnahme und deren Mittelwert (rechts) an einem induktiven Widerstand bei sinusförmigem Wechselstrom/-spannung (links) mit $+90^\circ$ Phasendifferenz und $U_{\text{eff}}=1\text{V}$, $I_{\text{eff}}=1\text{A}$.

Bei anderen Zweipolen komplexerer Zusammensetzung können sich auch andere Phasenverschiebungen als -90° , 0° oder $+90^\circ$ einstellen. Betrachten wir die Reihenschaltung von einer Induktivität und einem ohmschen Widerstand, so daß sich bei der betrachteten Frequenz gerade eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 45^\circ$ einstellt (Bild 60). Nach Gl.(183) ergibt sich dann ein mittlerer Leistungsanteil, der geringer ist, als der bei 0° Phasenverschiebung. Diese Leistung wird im Widerstand zu Wärme umgesetzt, während der Wechselanteil wieder von der Induktivität bestimmt wird.

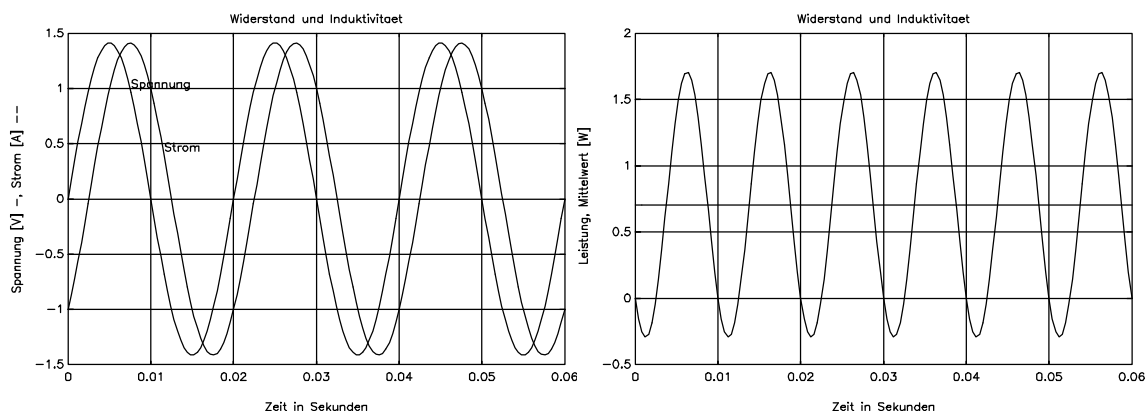


Bild 60: Elektrische Leistungsaufnahme und deren Mittelwert (rechts) an einem induktiven Widerstand, der in Reihe zu einem ohmschen Widerstand liegt, bei sinusförmigem Wechselstrom/-spannung (links) mit $+45^\circ$ Phasendifferenz bei dieser Frequenz und $U_{\text{eff}}=1\text{V}$, $I_{\text{eff}}=1\text{A}$.

Der Leistungsmittelwert \bar{P} in Gl.(183) wird auch als **Wirkleistung** P_W bezeichnet, da dieser Leistungsanteil zu Wirkungen, wie Erwärmung, führt. Sie läßt sich auch nach

$$P_W = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) \quad (184)$$

berechnen.

Werden nur die Effektivwerte von Spannung und Strom ohne Berücksichtigung der Phasenlage gemessen, dann erhalten wir die sogenannte **Scheinleistung** P_S :

$$P_S = U_{eff} \cdot I_{eff}. \quad (185)$$

Sie ist i.d.R. zu groß und stimmt mit der Wirkleistung nur bei ohmschen Verbrauchern, also Phasendifferenz 0 oder in Gleichstromnetzen überein. Sie berücksichtigt nicht, daß Leistungsanteile von kapazitiven oder induktiven Speichern wieder zurückgegeben werden.

Bei Phasenverschiebung ungleich 0 stellt sich die sogenannte **Blindleistung** Q ein und es gilt der Zusammenhang zwischen Wirkleistung und Scheinleistung [38]

$$Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I) = \sqrt{P_S^2 - P_W^2}. \quad (186)$$

Soll die Wirkleistung ermittelt werden, dann kann dies prinzipiell über Verfahren geschehen, bei denen die Momentanleistung erfaßt wird, also das Produkt zu jedem Zeitpunkt aus Strom und Spannung, und danach eine Mittelung durchgeführt wird. Außer einem strukturellen Ansatz (elektronische Leistungsmessung oder digitale Signalverarbeitung) sind alle physikalische Verfahren einsetzbar, bei denen aus zwei beliebigen physikalischen Größen eine momentanes Produkt gebildet wird, bei dem der eine Faktor auf die ursächliche momentane Spannung $u(t)$ und der andere Faktor auf den ursächlichen, momentanen Strom $i(t)$ zurückzuführen ist. Hier bieten sich einige Verfahren an, die nachfolgend diskutiert werden.

2.2.4.2 Abgriff von Wechselstrom und Wechselspannung

Wechselströme und Wechselspannungen treten auch in unseren Versorgungsnetzen (50..60Hz) auf, wo Meßaufgaben, insbesondere der elektrischen Leistungsmessung besonders häufig auftreten. Die dort vorkommenden Leistungen sind, im Vergleich zu nachrichtentechnischen Netzwerken, hoch, demzufolge sind die Spannungen hoch und auch die Ströme hoch. Meßwerke können daher nicht immer unmittelbar an das Netz angeschlossen werden.

Mitunter ergibt sich auch die Forderung, potentialfrei (isoliert) zu messen, oder es darf ein Strompfad zur Strommessung nicht aufgetrennt werden.

In diesen Fällen werden die Meßsignale nicht direkt, sondern über Meßtransformatoren (Meßübertrager) ausgekoppelt. Sie erlauben die Potentialtrennung, können Spannungswerte und Stromwerte an Meßbereiche anpassen und erhöhen die Sicherheit beim Messen hoher Leistungen. Es werden dabei folgende Fälle unterschieden:

- **Direkter Meßabgriff:** Strom und Spannung werden direkt durch das Meßinstrument abgegriffen. Es werden keine Transformatoren eingesetzt.

- **Halbindirekter Meßabgriff:** Eine der beiden Meßgrößen, i.d.R. der Strom, wird über einen geeigneten Transformator abgegriffen. Der Abgriff der anderen Größe erfolgt direkt.
- **Indirekter Meßabgriff:** Beide Meßgrößen werden über geeignete Transformatoren abgegriffen.

Hierbei ist zu beachten, daß die Meßtransformatoren nur für bestimmte Einsatzbereiche geeignet sind. Insbesondere muß der Übertragungsbereich berücksichtigt werden. Je nach Bestimmung werden sie als **Spannungswandler** oder **Stromwandler** eingeteilt [32].

Eine Sonderform des stromauskoppelnden Übertragers ist die Stromzange. Der magnetische Kern läßt sich zangenähnlich öffnen und um die zu Messende leitung legen. Die stromführende Leitung stellt dann die Primärwicklung dar. Damit ist der Fluß im Kern proportional dem zu messenden Strom. Sekundärseitig liegt eine entsprechende Wicklung. I.allg. übersetzt dieser Trafo hoch, da der erzeugte Fluß bei nur "einer" Primärwindung gering ist. Vorteilig ist, daß der zu messende Stromkreis nicht unterbrochen oder entsprechend vorbereitet werden muß. Die Stromzange wird überwiegend für Ströme im Amperebereich und höher eingesetzt.

2.2.4.3 Strom-Spannungsmessung (Scheinleistung)

Wie bereits vorgestellt, ist die Leistung aus dem Produkt Strom und Spannung zu bestimmen. Messen wir gleichzeitig mit Effektivwertmessern Strom und Spannung, dann geht die Phaseninformation verloren und wir erhalten die Scheinleistung nach Gl.(185). Liegt die Phasenverschiebung vor, dann lassen sich Wirk- und Blindleistung daraus berechnen (Gln.(184)(186)). Liegt die Phasenverschiebung nicht vor, müssen wir eine Wirkleistungsmessung (siehe weiter unten) durchführen und können uns über Gl.(186) die Blindleistung berechnen.

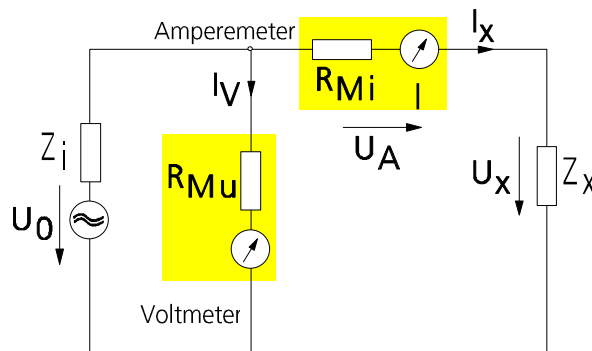


Bild 61: Strom- Spannungsmessung zur Bestimmung der Scheinleistung (stromrichtige Schaltung)

Als Schaltung zum Messen der Scheinleistung an der Impedanz Z_x können zwei Arten der Strom-Spannungsmessung vorgenommen werden: a) spannungsrichtige Schaltung (Voltmeter direkt über Z_x) und b) stromrichtige Schaltung nach Bild 61 (Ammeter im Pfad von Z_x). Die Wahl der Schaltung hängt von den Widerstandsverhältnissen zwischen Z_x und den Innenwiderständen der Meßgeräte ab (Eine ausführliche Diskussion folgt bei der Widerstandsmessung). Wichtig ist, daß Effektivwerte ermittelt werden.

2.2.4.4 Elektrodynamisches Meßwerk

Das elektrodynamische Meßwerk (Bild 62) ist im Prinzip wie ein Drehspulmeßwerk (Bild 41) aufgebaut. In einem Luftspalt, in dem ein magnetischer Fluß Φ herrscht, sind die Windungen einer Drehspule, die ein Drehmoment auf einen Zeiger ausübt, das proportional dem die Spule durchfließenden Strom I_{Sp} ist. Dies führt zu einem Zeigerausschlag, bis dieses Drehmoment sich mit dem einer Rückstellfeder ausgleicht. Im Gegensatz zum Drehspulinstrument wird der magnetische Fluß aber nicht durch einen Permanentmagneten erzeugt, sondern durch eine Feldspule, die vom Strom I_{Fe} durchflossen wird. Faßt man die Gerätekonstanten zu einem Faktor K zusammen, dann gilt für den Ausschlagwinkel α des Zeigers

$$\alpha = K \cdot I_{Sp} \cdot I_{Fe} \tag{187}$$

Es wird also das Produkt gebildet. Rührt I_{Sp} vom Spannungsabgriff und I_{Fe} vom Stromabgriff her, ggf. unter Verwendung geeigneter Vor-, bzw. Nebenwiderstände oder Meßübertrager, dann ergibt sich zunächst die Momentanleistung mit dem Zeigerausschlagswinkel

$$\alpha = K^* u(t) \cdot i(t) = K^* p(t) \tag{188}$$

wobei K^* eine neue Konstante ist, da jetzt U statt I_{Sp} berücksichtigt wird.

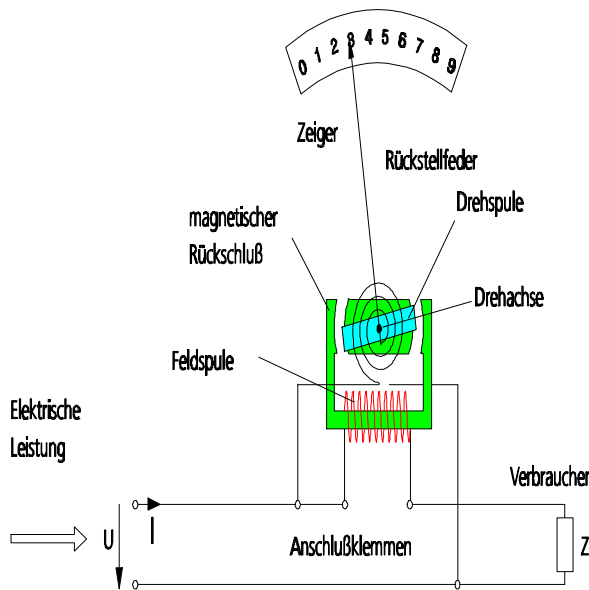


Bild 62: Elektrodynamisches Meßwerk zur Messung der Wirkleistung in einer Verbraucherimpedanz Z

Aufgrund der mechanischen Trägheit wird der Mittelwert von dem zeitlich veränderlichen Drehmoment gebildet, d.h. es wird der Ausschlagwinkel

$$\alpha = K^* \cdot \overline{u(t) \cdot i(t)} = K^* \cdot P_W \tag{189}$$

angezeigt, also der Mittelwert der Momentanleistung. Diese entspricht nach Gl.(183) der Wirkleistung P_W .

Für die richtige Erfassung der Polarität der Leistung ist auf die richtige Polung der Anschlußklemmen, auch bei Wechselstrom (!), zu achten. Anmerkung: Die Polarität der Leistung kennzeichnet Leistungsaufnahme oder -abgabe.

2.2.4.5 Hall-Multiplikator-Meßwerk

Hier wird der Momentanwert der elektrischen Leistung $u(t)i(t)$ mittels eines Hall-Elementes gemessen [23][28]. Dieses beruht auf dem Hall-Effekt [40][39][41]. Wird ein Streifen aus leitendem Material (Bild 63 rechte Ausschnittsvergrößerung) der Breite b und der Dicke d von einem Strom I durchflossen und senkrecht dazu von einer magnetischen Flußdichte B durchsetzt, dann kann über zwei Punkte an den gegenüberliegenden Längsseiten, also senkrecht zum Strom und senkrecht zum magnetischen Fluß, eine Spannung, die sog. Hall-Spannung, abgegriffen werden.

Die Querspannung U_H beruht auf die Ablenkung der Ladungsträger im Magnetfeld B , die den Strom I tragen und damit sich mit der Geschwindigkeit v bewegen. Die Ablenkung kann nur soweit erfolgen, bis die Querspannung einen weiteren Aufbau verhindert (Feldstärke E_H durch Querspannung). Für einen Ladungsträger der Ladung q gilt dann das Gleichgewicht

$$q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E}_H \Rightarrow \vec{E}_H = \vec{v} \times \vec{B} \tag{190}$$

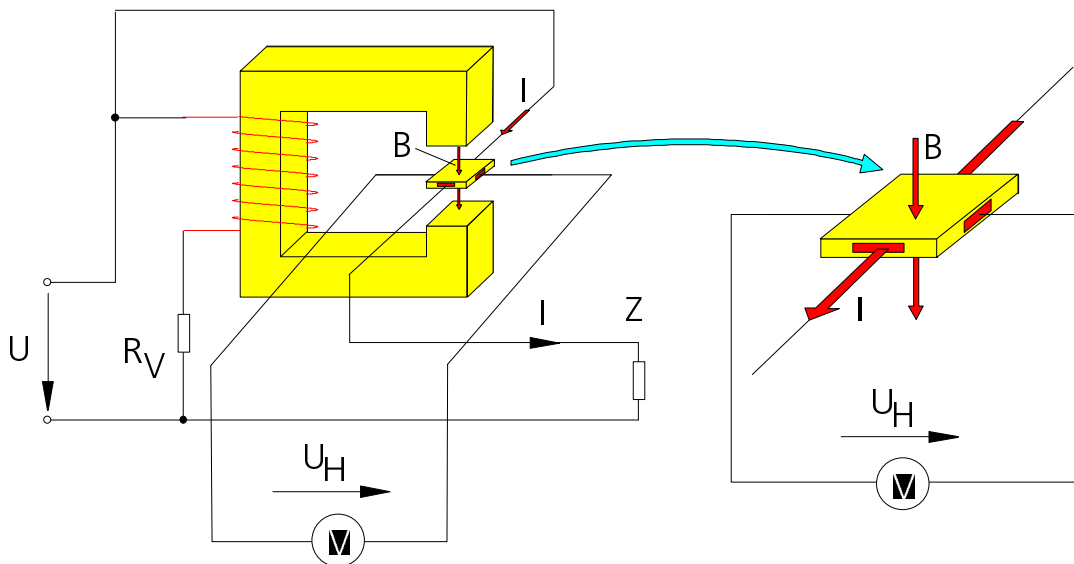


Bild 63: Leistungsmessung mittels Hallmultiplikator. Rechts ist eine Ausschnittsvergrößerung des Hall-Elements dargestellt.

und für die Hallspannung U_H an den im Abstand b gegenüberliegenden Seiten erhalten wir dann, wenn homogene Felder E_H und B und rechte Winkel vorausgesetzt werden

$$U_H = E_H \cdot b = vBb. \tag{191}$$

Drücken wir den Strom I über die Geometrie des Leiters (Leiterquerschnitt $d \cdot b$) und über die Geschwindigkeit v der Ladungsträger und deren Dichte n aus [39], dann ergibt sich für die Stromdichte S aus der Raumladungsdichte nq

$$S = \frac{I}{d \cdot b} = nqv \Rightarrow v = \frac{I}{nqbd} \tag{192}$$

und damit, eingesetzt in Gl.(191)

$$U_H = \frac{1}{nq} \cdot \frac{I \cdot B}{d} = R_H \cdot \frac{I \cdot B}{d} \tag{193}$$

Die Hallspannung ist damit ein Produkt aus dem Strom I und dem Magnetfeld B. R_H wird Hall-Konstante genannt.

Da das Magnetfeld B ursächlich von der Spannung $u(t)$ hervorgerufen wird (Bild 63), läßt sich der Zusammenhang Gl.(193) auch als

$$U_H = K^{**} \cdot u(t) \cdot i(t) = K^{**} \cdot p(t) \tag{194}$$

schreiben, wobei alle Konstanten aus Gl.(193) und der Übertragungsfaktor zwischen $u(t)$ und $B(t)$ als Konstante K^{**} zusammengefaßt sind. U_H ist damit proportional der Momentanleistung $p(t)$. Gegenüber dem elektrodynamischen Meßwerk ist der Hall-Multiplikator quasi trägheitslos. Frequenzbegrenzung erfährt das Meßwerk hauptsächlich durch die Feldspule samt Eisenkern, um B zu erzeugen.

Um die Wirkleistung bestimmen zu können muß U_H gemittelt werden. Dies kann dadurch geschehen, daß U_H mit einem trägen Meßwerk ggf. mit Meßverstärker, z.B. Drehspulmeßwerk erfaßt oder über einen Tiefpaß (Filter) gemittelt wird.

Auch bei diesem Meßverfahren ist für die richtige Erfassung der Polarität der Leistung auf die richtige Polung der Anschlußklemmen, auch bei Wechselstrom (!), zu achten. Anmerkung: Die Polarität der Leistung kennzeichnet Leistungsaufnahme oder -abgabe.

2.2.4.6 Elektronische Leistungsmessung

Wie bereits bei der Messung des Effektivwertes gezeigt wurde, können auch die Definitionsgleichungen Gl.(181) und Gl.(183) direkt ausgewertet werden. Dies kann über elektronische Komponenten (Schaltungen) geschehen. Bild 64 zeigt eine solche Struktur, die nach einem ähnlichen Ansatz aufgebaut worden ist, wie die elektronische Effektivwertmessung (siehe dort, Bild 53). Alle Signale werden hier als elektrische Spannungen dargestellt. Andere Größen müssen durch "Normierung" auf Spannungseinheiten umgeformt werden, so z.B. die Leistung in Watt auf Spannung in Volt. So könnte z.B. 1 Volt einem Watt entsprechen.

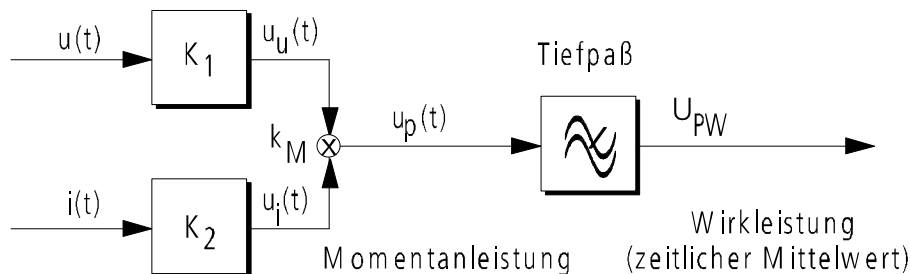


Bild 64: Struktur eines elektronischen Leistungsmessers

Zunächst wird auf elektronischem Wege die Momentanleistung $p(t)$ ermittelt (Bild 64). Dies geschieht zunächst durch eine Aufbereitung der Spannung (Meßverstärker K_1 mit der Ausgangsspannung u_u) und des Stroms (Strom-Spannungswandler K_2 , z.B. Shunt mit

Meßverstärker mit der Ausgangsspannung u_i). Die beiden so erhaltenen Spannungen werden dem Multiplizierer k_M zugeführt. Dieser bildet mit

$$u_p(t) = k_M \cdot u_u(t) \cdot u_i(t) \tag{195}$$

ein Spannungssignal u_p , welches die Momentanleistung darstellt. Der Zusammenhang zwischen Leistung und "abgebildeter" Spannung u_p wird durch den Übertragungsfaktor k_M und die Wandlerkonstanten k_1 und k_2 festgelegt.

Der nachgeschaltete Tiefpaß mittelt das Signal u_p über der Zeit (Trägheit) und bildet eine Spannung U_{PW} , die ein Maß für die Wirkleistung P_W ist.

2.2.4.7 Digitale Signalverarbeitung

Ebenfalls ähnlich der Effektivwertmessung (siehe dort) kann mittels rechnergestützten Verfahren die Leistung bestimmt werden. Die Struktur ist dabei ähnlich der zur elektronischen Leistungsmessung (Bild 64).

Die aufbereiteten Signale u_u und u_i (Bild 64) werden mittels analog-digitaler Umwandlung (AD-Wandler) in Zahlenfolgen mit i.d.R. äquidistanten Zeitabständen T umgewandelt und liegen dann als Zahlenfolge von Zahlenpaaren vor

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_{u1} \\ u_{i1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{u2} \\ u_{i2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{un} \\ u_{in} \end{pmatrix} \right\} \tag{196}$$

Diese Zahlenwerte sind einheitenfrei, da sie beim Wandeln stets auf Referenzgrößen bezogen werden. Für jedes i -te Zahlenpaar kann nun ein Produkt p_i gebildet werden, das die Momentanleistung $p(t=iT)$ beschreibt. Dabei ist zu beachten, daß

- beide Signale zeitgleich (synchron) erfaßt wurden, also beim AD_Wandler nicht nach dem sog. Multiplexbetrieb³ verfahren wurde, das ein Zeitversatz zwischen u_u und u_i bewirken würde;
- die Übertragungsfaktoren und Referenzwerte der AD-Wandler mit in das Ergebnis einfließen.

Durch ein digitales Filter [34][42] läßt sich aus der Zahlenfolge $\{p_i\}$ auch der zeitliche Mittelwert P_W berechnen.

2.2.5 Energieverbrauchsmessung

Lernziel: Energie, Arbeit, Integration, Verfahren

Für die Energieverteilung (Stromversorgungsnetz) muß aus kommerziellen Gründen die verbrauchte Energie erfaßt werden. Definitionsgemäß (Gl.(145)) ist die einem bestimmten Zeitraum einem Verbraucher zugeführte Energie gleich der in diesem Zeitraum vorzeichenrichtig aufsummierten (integrierten) Momentanleistung $p(t)$. Da in Versorgungsnetzen sowohl die Spannung als auch der Strom veränderlich sein könnten, ist eine reine Strommessung nicht ausreichend. Ebenso sind Blindanteile in der Leistung nicht zu

³ Unter Multiplexbetrieb wird ein Abtastverfahren verstanden, bei dem ein einzelnes Abtastsystem (Wandlersystem) zwei oder mehr Signale bedient. Die Abtastung kann dann nicht mehr zeitgleich, sondern muß nacheinander erfolgen. Dadurch sind die verschiedenen Signalwerte zu versetzten Zeiten ermittelt.

messen, da diese Energieanteile zwischen Erzeuger und Verbraucher "pendeln" und daher unverbraucht bleiben. Es ist also nur die Wirkleistung zu messen und aufzusummieren.

Wie wir im vorangegangenen Kapitel über Leistungsmessung gesehen haben (Gl.(183)), erhalten wir die Wirkleistung aus dem zeitlichen Mittelwert der Momentanleistung. D.h., wir können unsere Verfahren zur Wirkleistungsmessung direkt umsetzen, indem wir das Leistungssignal aufsummieren.

In der Praxis besteht die Forderung, daß die tatsächlich verbrauchte Energie stets ablesbar ist und die Verbrauchsmessung nicht manipulierbar sein soll. Um die Anzeige auch bei Stromausfall zu gewähren, haben sich daher elektromechanische Verbrauchsmesser durchgesetzt. Die Integration des Leistungssignals erfolgt hier über ein mechanisches Zählwerk, welches über ein Getriebe angetrieben wird. Liegt kein Energieverbrauch vor oder fehlt die Spannung, dann kann trotzdem der aktuelle Zählerstand abgelesen werden.

Betrachten wir nun den Elektrizitätszähler (auch Induktionszähler, Elektroenergieverbrauchszähler, Energieverbrauchszähler, Stromzähler, oder Ferrariszähler genannt). Das mechanische Zählwerk (Bild 65) bildet die zeitliche Summe (kumuliert), bzw. das zeitliche Integral

$$n = \int_{t_1}^{t_2} \dot{n}(\tau) \cdot d\tau \tag{197}$$

über die Drehzahl $\dot{n}(t)$ einer Antriebsachse und zeigt es als Anzahl der Umdrehungen $n(t=t_1..t_2)$ an. D.h. die Drehzahl $\dot{n}(t)$ muß proportional zur Wirkleistung sein. Als Antrieb könnten wir wieder ein Zweispulsystem verwenden, ähnlich dem elektrodynamischen Meßwerk (Bild 62). Allerdings müßte die Drehspule beliebig drehbar gelagert sein und dürfte über keine Rückstellfeder, müßte dafür aber über eine Bremse verfügen, so daß sich der gewünschte Effekt einstellt. Wäre nämlich Drehspule ungebremst, dann würde das wirkleistungsproportionale Drehmoment M_{el} die Drehspule mit ihrem Trägheitsmoment J ohne Drehzahlbegrenzung beschleunigen:

$$\ddot{n} = \frac{1}{J} \cdot M_{el} \tag{198}$$

Mittels einer drehzahlproportionalen Bremswirkung, gewonnen aus dem Dauermagnetfeld und dem damit, bei Drehzahl induzierten Wirbelstrom in der Scheibe

$$M_{Br} = K_4 \cdot \dot{n}(t) \tag{199}$$

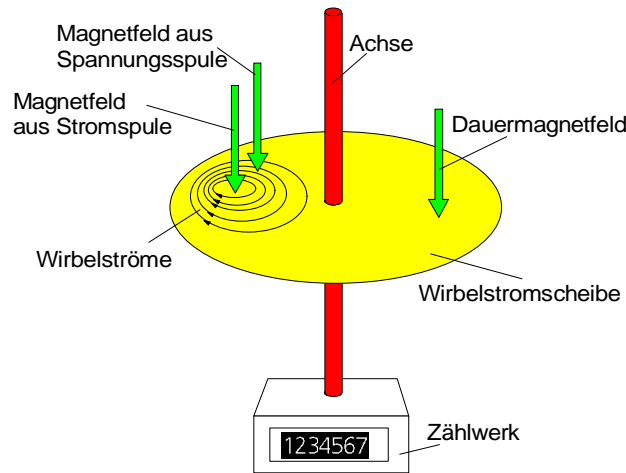


Bild 65: Prinzip eines Elektroenergieverbrauchszählers (Elektrizitätszähler, Ferrariszähler)

stellt sich dann aber eine Drehzahl ein die der Wirkleistung proportional ist, bis das elektrische Antriebsmoment sich mit dem Bremsmoment die Waage hält, d.h. es erfolgt keine Drehbeschleunigung $\ddot{n}(t)$ mehr (Bild 66).

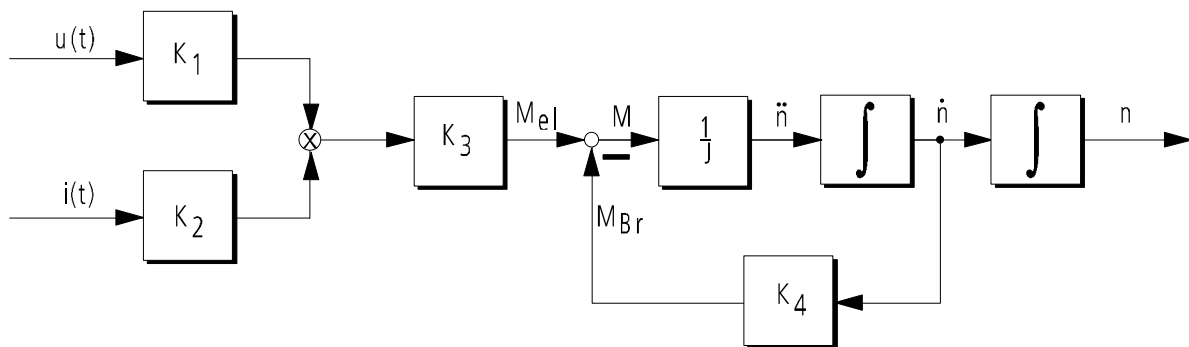


Bild 66: Vereinfachtestes Strukturbild eine Elektrizitätszählers
 K_i Übertragungsbeiwerte, J Trägheitsmoment der rotierenden Massen, M_{el} Antriebsmoment, gewonnen aus dem Produkt Spannung mal Strom (Leistung), M_{Br} Bremsmoment durch Dauermagnetfeld, n Umdrehungen der Zählwerkswelle [29].

Die Drehspule hätte noch den weiteren Nachteil, daß der Meßstrom über Schleifer zugeführt werden müßte und die Gefahren von Verschleiß, Verschmutzung und Reibung gegeben sind, die das Zählergebnis beeinträchtigen würden. Deshalb wird das Drehmoment M_{el} über einen Ferraris-Antrieb (Ferraris-Motor) [27] vorgenommen (Bild 65), der aus einer Metallscheibe (Aluminium) besteht, die mit der Zählerachse verbunden ist. Mittels zweier Spulen, eine mit Spannungsabgriff und eine im Strompfad, werden zwei Magnetfelder senkrecht zur Scheibe erzeugt. Liegt die Spannungsspule am Netz, wird in der Scheibe ein Wirbelstrom induziert [39]. Ein Drehmoment stellt sich erst dann ein, wenn auch ein Magnetfeld durch die Stromspule hervorgerufen wird, es kommt zu einem momentanleistungsproportionalen Drehmoment. Durch die mechanische Trägheit der Scheibe (Trägheitsmoment) erfolgt eine Mittelwertbildung und damit wird die Wirkleistung erfaßt. Somit sind keine Schleifer erforderlich. In Bild 66 ist die Struktur des Ferraris-Zählers zu erkennen. K_1 und K_2 sind

Übertragungsbeiwertwerte zwischen Spannung, bzw. Strom und den Magnetfeldern. Durch die Verkopplung kommt es zur Produktbildung die mittels K_3 als Drehmoment wirksam wird.

Zur Kontrolle trägt meistens die Scheibe am Rand eine Farbmarke, so daß eine Umdrehung durch ein Sichtfenster gut erkennbar ist. Über die sog. Zählerkonstante ist der Zusammenhang zwischen Anzahl der Umdrehungen und angezeigtem Elektroenergieverbrauch in [kWh] hergestellt.

Weitere Bauformen sind Drehstrom-Ferraris-Zähler, für Dreiphasenstrom. Für Großverbraucher gibt es auch "Zähler" die mikrorechnergestützt den Verbrauch ermitteln. Sie beruhen auf der Basis der digitalen Signalverarbeitung wie bei der Leistungsmessung.

2.2.6 Widerstandsmessung

Lernziel: Elektrischer Widerstand als Zweipol, Gleichspannungswiderstand, Wechselspannungswiderstand, Verfahren, Brücken

Bei der Widerstandsmessung muß wieder zwischen Gleichstrom- und Wechselstrommessung unterschieden werden. Generell ist der elektrische Widerstand über das Ohm'sche Gesetz (Gl.(148)) festgelegt. Elektrische Widerstände können damit auf eine Strom-/Spannungsmessung, ähnlich wie bei der Leistungsmessung zurückgeführt werden, oder auf eine Vergleichsmessung (Meßbrücke).

2.2.6.1 Strom-/Spannungsmessung

Der elektrische Widerstand wird gemäß der Definitionsgleichung Gl.(148) ermittelt. Strom und Spannung werden dabei als Gleichstrom/-spannung oder als Effektivwerte gemessen.

$$R = \frac{U}{I} \tag{200}$$

Bei Wechselstrom geht dann allerdings die Phasenrelation φ der Impedanz Z (Wechselstromwiderstand)

$$Z = |Z| \cdot e^{j\varphi} \tag{201}$$

verloren. Mit

$$\left. \begin{matrix} u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \\ i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{matrix} \right\} \Rightarrow |Z| = \left| \frac{\hat{u} \cdot e^{j0}}{\hat{i} e^{j\varphi}} \right| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{\hat{u} \cdot \sqrt{2}}{\hat{i} \cdot \sqrt{2}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \tag{202}$$

läßt sich aber der Betrag von Z ermitteln.

In der Praxis gibt es für Strom-Spannungsmessungen mehrere Möglichkeiten:

- die Spannung wird als konstant und bekannt vorausgesetzt und der Strom wird gemessen (Ohmmeter mit eingepprägter Spannung, Bild 67 oben); i.d.R. nur für ohmsche Widerstände bei Gleichspannung.
- der Strom wird als konstant und bekannt vorausgesetzt und die Spannung wird gemessen (Ohmmeter mit eingepprägtem Strom, Bild 67 unten); i.d.R. nur für ohmsche Widerstände bei Gleichspannung.

- weder Strom noch Spannung sind bekannt, beide müssen gemessen werden (siehe unten).

Bei den Ohmmetern muß berücksichtigt werden, daß ein Teil der Spannung, bzw. des Stroms, am Innenwiderstand, bzw. durch den Querwiderstand, verlorengeht. Der Meßwert muß entsprechend korrigiert sein. Ohmmeter mit eingepprägter Spannung weisen eine inverse Skala auf, da ja das Instrument den Strom I mißt, d.h. Ausschlag 0 bei R_x unendlich und "Vollausschlag" bei $R_x=0$. Der eingepprägte Strom wird meist über eine elektronische Schaltung realisiert.

Werden Strom und Spannung gemessen, dann ergibt sich der Widerstand zu

$$R_X = \frac{U_X}{I_X} \tag{203}$$

wobei zwei Meßschaltungen (Bild 68) möglich sind:

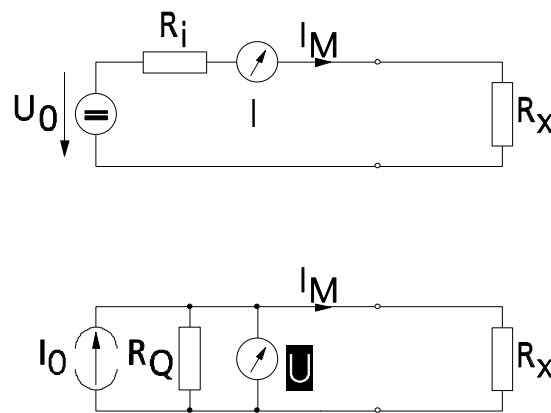


Bild 67: Widerstandsmessung mittels eingepprägter Spannung (oben) oder eingepprägtem Strom (unten); sog. Ohmmeter

- Spannungsrichtige Messung: das Voltmeter mißt die wahre Spannung U_x über dem unbekanntem Widerstand R_x . Das Amperemeter zeigt den um I_V zu großen Strom I_M an. Diese Schaltung ist einzusetzen bei $R_x \ll R_{MU}$.
- Stromrichtige Messung: das Amperemeter mißt den wahren Strom I_x durch den unbekanntem Widerstand R_x . Das Voltmeter zeigt die um U_A zu große Spannung $U_V = U_A + U_x$ an. Diese Schaltung ist einzusetzen bei $R_x \gg R_{MI}$.

Da die Widerstände der Meßgeräte normalerweise bekannt sind, können die Meßergebnisse auch korrigiert werden:

bei spannungsrichtiger Schaltung (Parallelwiderstand R_{MU} wird abgezogen):

$$R_X = \frac{1}{\frac{I_M}{U_X} - \frac{1}{R_{MU}}}; \tag{204}$$

bei stromrichtiger Schaltung (Reihenwiderstand R_{MI} wird abgezogen):

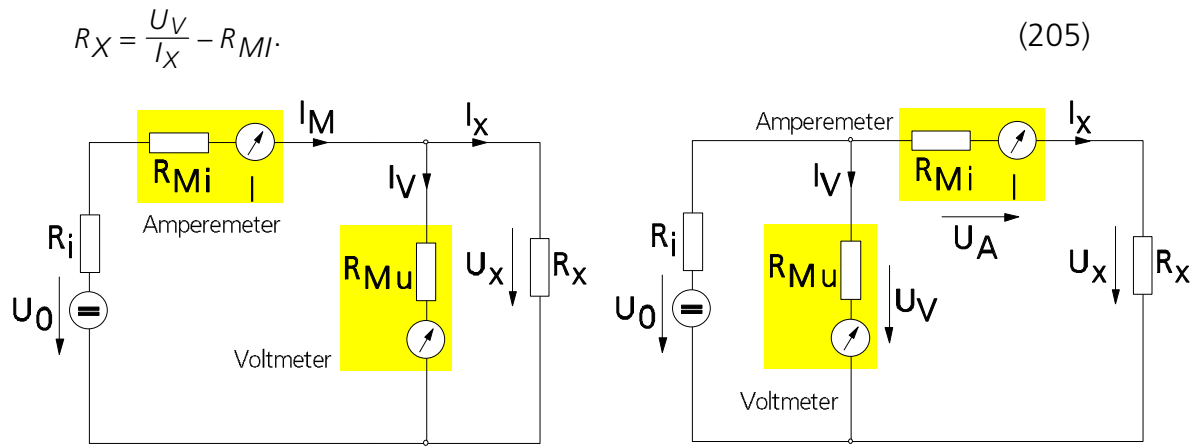


Bild 68: Widerstandsmessung mittels Strom-Spannungsmessung; links: spannungsrichtige Messung; rechts: stromrichtige Messung

2.2.6.2 Vierdrahtmessung

Bei kleinem unbekanntem Widerstand R_X gehen die Leitungs- und Kontaktwiderstände in das Meßergebnis spürbar ein. Hier ist die Art der Verdrahtung nicht mehr beliebig wählbar. Der Spannungsabgriff erfolgt unmittelbar über R_X , so daß über die Anschlußleitung des Voltmeters kein zusätzlicher Spannungsabfall gemessen wird (Bild 69).

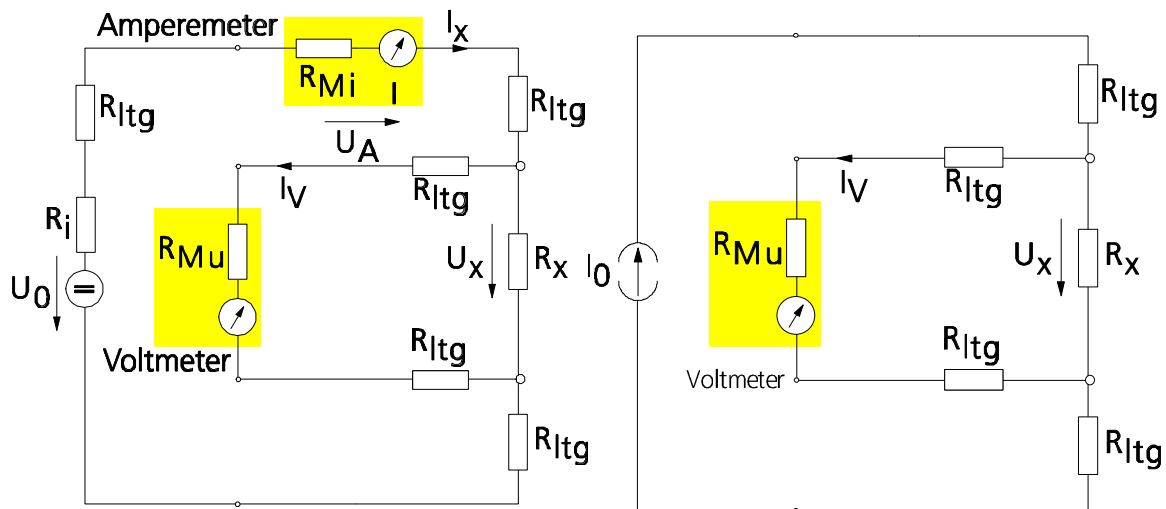


Bild 69: Widerstandsbestimmung durch Vierdrahtmessung; links: Strom-Spannungsmessung; rechts: bei eingprägtem Strom.

Dies gilt für Strom-Spannungsmessung und für Ohmmeter. Viele Meßinstrumente für Widerstandsmessung verwenden eingebaute Stromquellen und verfügen über 4 Anschlußklemmen, zwei für die Stromquelle und zwei für das Meßwerk. Normalerweise sind je eine Klemme des Meßwerks mit einer Klemme der Stromquelle kurzgeschlossen. Für Vierdrahtmessung sind die zwei Kurzschlußbügel zu öffnen und eine Verschaltung wie in Bild 69 rechts vorzunehmen. Die Anschlußklemmen des Meßwerks sind dabei häufig mit "Sense" oder "Guarding" gekennzeichnet.

2.2.6.3 Gleichspannungsmeßbrücke (Wheatstonebrücke)

Eine weitere gängige und in vielen Varianten vorhandene Methode der Widerstandsmessung ist die des Vergleichens. Dabei wird über einem unbekanntem Widerstand R_x ein Spannungsabfall erzeugt und mit einem Spannungsabfall über einem bekannten, ggf. definiert einstellbaren Widerstand verglichen. Voraussetzung wäre hier allerdings, daß die Ursache für beide Spannungsabfälle, nämlich der Strom, in beiden Widerständen exakt gleich ist. Dies würde durch eine Reihenschaltung der Widerstände erzielbar sein, hätte aber die Folge, daß der schaltungstechnische Abgriff nicht so einfach durchführbar ist.

Ein anderer Weg des Vergleichens nutzt die "Spannungsteiler"-Eigenschaft von zwei in Reihe geschalteten Widerständen. So gilt für die Spannung über dem Widerstand R_2 bei zwei in Reihe liegenden Widerständen R_1 und R_2 bei einer gemeinsamen Speisespannung U_0

$$U_2 = I \cdot R_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (206)$$

Wird für einen unbekanntem Widerstand R_x zusammen mit einem Widerstand R_3 ein zweiter Spannungsteiler aufgebaut, der über die gleiche Speisung U_0 betrieben wird, sog. Wheatstone'sche Brückenschaltung (Bild 70), dann gilt entsprechend

$$U_X = U_0 \cdot \frac{R_X}{R_X + R_3} \quad (207)$$

Der Vergleich gestaltet sich hier sehr einfach durch den Vergleich der beiden Spannungen. Wir erhalten dann mit Gl.(206) und Gl.(207)

$$U_b \stackrel{!}{=} U_2 - U_X = U_0 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_X}{R_X + R_3} \right] \quad (208)$$

Die sog. Brückendiagonalspannung U_b muß bei erfolgtem Vergleich, dem sog. Abgleich, verschwinden. Dies wird erreicht, wenn wir $U_b \ll 0$ annehmen, durch

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_X}{R_X + R_3} \Rightarrow 1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 + \frac{R_3}{R_X} \Rightarrow \underbrace{\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_X}{R_3}}_{\text{Abgleichbedingung}} \quad (209)$$

Aus der Abgleichbedingung in Gl.(209) läßt sich dann der unbekannte Widerstand berechnen

$$R_X = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad (210)$$

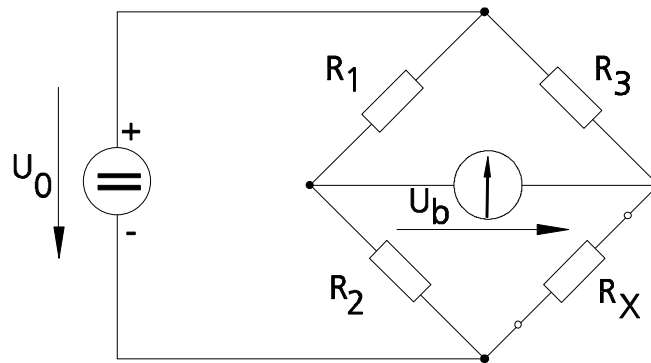


Bild 70: Meßbrücke für ohmsche Widerstände zur Bestimmung des unbekanntes Widerstandes R_X (Wheatstone-Brücke)

Der Abgleich wird durch ein sog. Nullinstrument (Galvanometer) erfaßt. Es ist ein Gleichspannungsmeßgerät, z.B. Drehspulinstrument, bei dem der Nullpunkt auf der Skalenmitte liegt und, je nach Polarität von U_b , der Ausschlag nach links oder rechts erfolgen kann. Früher wurden auch Spiegelgalvanometer mit einer besonders leichten Bauform der Drehspule eingesetzt, bei der statt des mechanischen Zeigers ein Spiegel verdreht wird. Ein Lichtstrahl wird abgelenkt und kann über große Projektionslängen, ggf. mit Mehrfachreflexion, große Ausschläge bei kleinsten Spannungen anzeigen. Heute kann U_b elektronisch verstärkt werden, so daß sich die geforderten Empfindlichkeiten einstellen.

In der Bestimmungsgleichung (210) tritt die Versorgungsspannung nicht mehr in Erscheinung, R_X wird nur durch den Vergleich von Widerständen gewonnen. Dabei ist meist R_3 entweder fest oder in groben Stufen zur Anpassung des Meßbereichs verstellbar. Der Abgleich wird durch verändern der Widerstände R_1 und R_2 durchgeführt. Die Brücke wird hier im sog. Kompensationsverfahren betrieben.

Bei der sog. Schleifdrahtmeßbrücke ist der Gesamtwiderstand R_1+R_2 als durchgehender Drahtwiderstand aufgebaut. Der Abgriff für das Nullinstrument erfolgt durch Verschieben eines Schleifers, so daß der Draht in die Längen l_1 und l_2 geteilt wird. Statt des Widerstandsverhältnisses R_2/R_1 kann dann auch das Längenverhältnis l_2/l_1 gebildet werden.

Betrachten wir die Verhältnisse bei nicht abgeglicherer Brücke, d.h. $U_b \neq 0$. Die Brücke wird dann im sog. Ausschlagsverfahren betrieben. Aus Gl.(208) läßt sich die Diagonalspannung allgemein berechnen. Für den Sonderfall $R_1=R_2=R_3=R_0$ erhalten wir (Bild 71 links)

$$\frac{U_b}{U_0} = \frac{1}{1 + \frac{R_X}{R_0}} - \frac{1}{2} \quad (211)$$

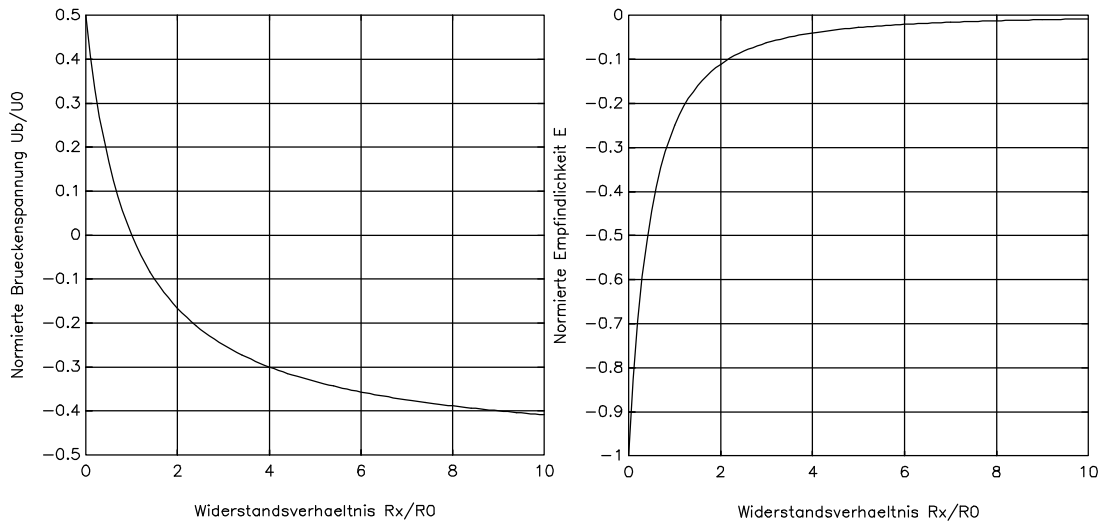


Bild 71: Normierte Kennlinie (links) und normierte Empfindlichkeit (rechts) einer Wheatstonebrücke.

und damit für die normierte Empfindlichkeit (Bild 71 rechts)

$$E = \frac{d\left(\frac{U_b}{U_0}\right)}{d\left(\frac{R_X}{R_0}\right)} = \frac{-1}{\left(1 + \frac{R_X}{R_0}\right)^2} \tag{212}$$

Die Kennlinie ist nichtlinear. Die Empfindlichkeit um den Abgleich beträgt

$$E_0 = E_{R_X=R_0} = -\frac{1}{4} \tag{213}$$

Diese Betrachtungen gelten nur für Brücken, bei denen die Brückendiagonale unbelastet bleibt, also wenn das Nullinstrument (Galvanometer) idealerweise einen unendlich hohen Widerstand R_G besitzt oder, zumindest als Näherung, $R_G \gg R_0$ ist. In der Praxis ist dies jedoch nicht immer der Fall. Eine Brücke mit realem Galvanometer mit endlichem Widerstand R_G zeigt Bild 72. Für die Brückendiagonalspannung ergibt sich nun [28]

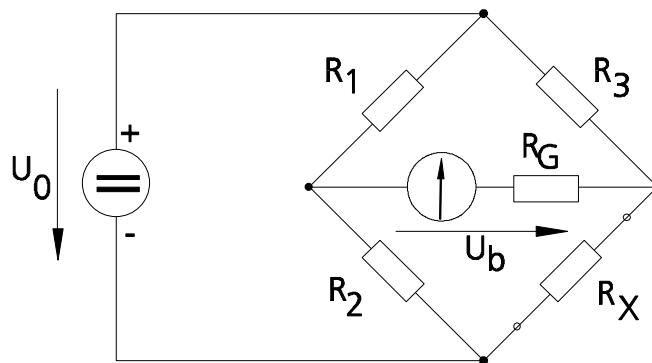


Bild 72: Wheatstone'sche Brücke mit Galvanometer mit endlichem Widerstand.

$$\frac{U_b}{U_0} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_X}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{R_G}} \tag{214}$$

Für R_G gegen unendlich geht Gl.(214) in Gl.(208) über.

Beim Anschließen eines unbekannten Widerstandes an eine Brücke sind i.d.R. Anschlußleitungen mit Widerständen R_{ltg1} und R_{ltg2} erforderlich (Bild 73).

Die Widerstände R_{ltg} sind normalerweise unbekannt. Mit gleichlangen Leitungen kann zumindest $R_{ltg1} = R_{ltg2}$ näherungsweise erzielt werden. Der mittels Abgleich ermittelte Widerstand R_X' ist um die Leitungswiderstände zu groß

$$R_X' = R_X + R_{ltg1} + R_{ltg2} \quad (215)$$

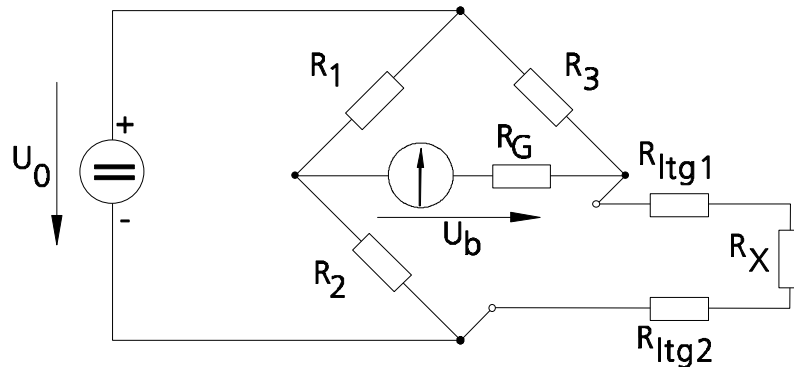


Bild 73: Meßbrücke mit Leitungswiderständen zum unbekanntem Widerstand R_X .

Zur Korrektur der Spannungsabfälle über den Leitungswiderständen läßt sich die Brücke so schalten, daß der Spannungsabfall über der zum Widerstand R_X hinführenden Leitung R_{ltg1} sich mit dem Spannungsabfall der rückführenden Leitung R_{ltg2} genau aufhebt, wenn beide Leitungswiderstände gleich groß sind (Bild 74).

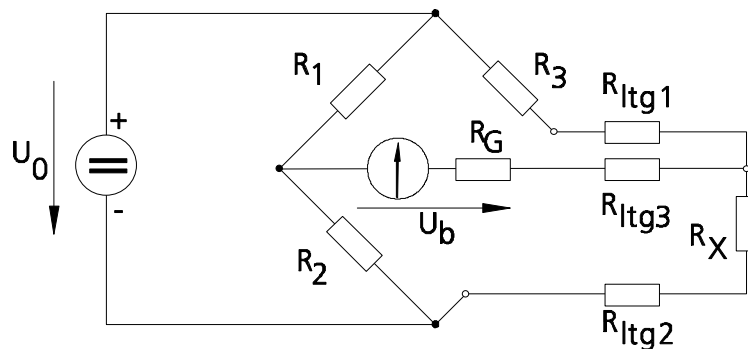


Bild 74: Meßbrücke in Dreileiterschaltung mit Leitungswiderständen R_{ltg} .

Diese Schaltung wird Dreileiterschaltung genannt, da der Galvanometerabgriff über eine dritte Leitung R_{ltg3} dem unbekanntem Widerstand R_X zugeführt wird. Da die Brücke im Abgleichverfahren betrieben wird, fließt im Abgleich über R_{ltg3} kein Strom, der Leitungswiderstand geht also in das Meßergebnis nicht ein. Durch die Leitungswiderstände wird allerdings die Kennlinie im Ausschlagsverfahren und damit auch Empfindlichkeit verändert. Diese Schaltung ist für Präzisionsmessungen und bei mäßig kleinen R_X vorteilhaft einzusetzen. Voraussetzung ist allerdings $R_1 = R_2$.

2.2.6.4 Meßbrücke für kleine ohmsche Widerstände (Thomsonbrücke)

Wie wir bereits bei der Strom-Spannungsmessung gesehen haben treten bei niederohmigen Widerständen Meßfehler durch Kontakt- und Leitungswiderstände auf. Durch die sog. Vierleitertechnik (Vierdrahtmessung) konnten diese Widerstände in der Messung eliminiert werden (Bild 69). Eine ähnliche Fragestellung tauchte auch bereits bei der Wheatstone'schen Meßbrücke auf und führte uns zur Dreileiterschaltung, mit dem Ziel Leitungswiderstände aus dem Meßergebnis zu beseitigen.

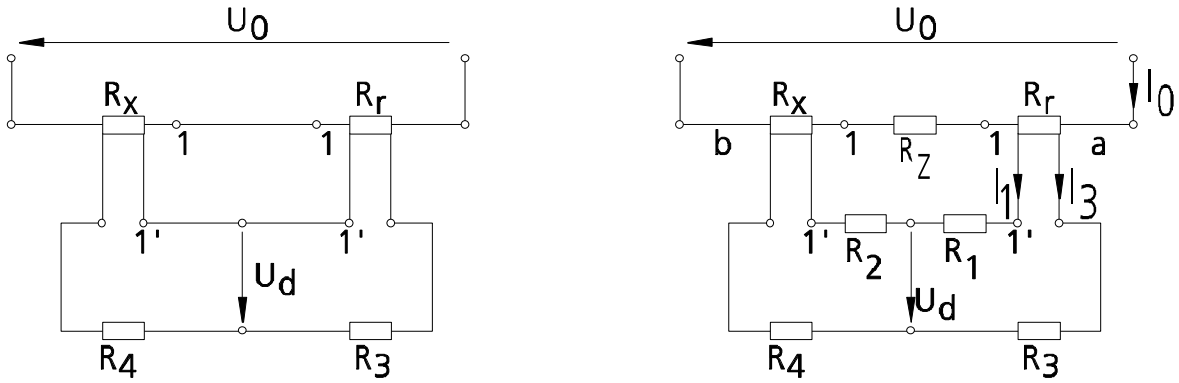


Bild 75: Schaltung der Thomsonbrücke zur Messung niederohmiger Widerstände; $R_x, R_r \ll R_1, R_2, R_3, R_4$.

Präzisionswiderstände und auch Widerstände kleinster Ohmwerte sind in Vierleitertechnik ausgeführt, wie sie bereits zu Bild 51 (rechts) vorgestellt wurden. Sie verfügen über zwei Anschlußklemmen für die Stromzuführung und zwei getrennte Anschlußklemmen für den Spannungsabgriff. Diese Widerstände können daher nicht in eine Wheatstonebrücke integriert werden.

Widerstände in Vierleitertechnik, mit $R_x, R_r \ll R_1, R_2, R_3, R_4$, werden vorteilhaft mit der Thomsonbrücke (Bild 75) gemessen [28][25]. Der unbekannte Widerstand R_x und ein Referenzwiderstand (Vergleichswiderstand) R_r werden mit ihren jeweils 4 Anschlußdrähten in die Brücke geschaltet (Bild 75 links). Die Anschlußpunkte 1 und 1' liegen allerdings nicht, wie in der Abbildung dargestellt, auf einem Potential, sondern sind über den nicht mehr vernachlässigbaren Zuleitungswiderstand R_z verschaltet (Bild 75 rechts). Bezeichnen wir die Parallelschaltung der Widerstände R_1+R_2 und R_z mit R_p

$$R_p = \frac{R_z(R_1+R_2)}{R_z+R_1+R_2}, \tag{216}$$

dann erhalten wir für die Brückendiagonalspannung U_d im Leerlauf, d.h. ohne Belastung,

$$U_d = U_3 - U_r - U_1 \tag{217}$$

$$U_d = \underbrace{(I_0 - I_3)(R_r + R_p + R_x)}_{U_3} \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \underbrace{(I_0 - I_3)R_r}_{U_r} - \underbrace{(I_0 - I_3)R_p \frac{R_1}{R_1 + R_2}}_{U_1}$$

Die Thomsonbrücke ist abgeglichen, wenn $U_d=0$ ist. Der Strom (I_0-I_3) durch die Reihenschaltung $R_r, R_x,$ und R_p läßt sich dann in Gl.(217) ausklammern, so daß wir eine reine Widerstandsgleichung erhalten:

$$(R_r + R_p + R_x) \frac{R_3}{R_3 + R_4} - R_r - R_p \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0. \quad (218)$$

Klammern wir weiterhin R_p aus, dann ergibt sich

$$R_p \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) - \frac{(R_r + R_x)R_3}{R_3 + R_4} - R_r = 0. \quad (219)$$

Die Abgleichbedingung Gl.(219) wird unabhängig vom Wert R_p , also den Leitungs- und Anschlußwiderständen, wenn der erste Klammerausdruck verschwindet

$$\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0 \quad \text{wenn} \quad \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} \quad (220)$$

Diese Forderung wird bei Thomsonbrücken durch eine mechanische Kopplung der Widerstände R_1, \dots, R_4 , z.B. durch eine gemeinsame Welle, erreicht.

Den verbleibenden Ausdruck in Gl.(219) lösen wir nach dem gesuchten Widerstand R_x auf:

$$R_x = R_r \cdot \frac{R_2}{R_1}. \quad (221)$$

Der Abgleich erfolgt damit über die hochohmigeren Widerstände R_1, \dots, R_4 ohne Einfluß der Anschluß- und Leitungswiderstände. R_r ist in der Größenordnung von R_x zu wählen, um eine zu große Vertimmung der Abgleichwiderstände zu vermeiden.

2.2.6.5 Wechselspannungsmeßbrücken

Wechselspannungsbrücken arbeiten prinzipiell auf die gleiche Weise, wie Wheatstonesche Brücken, werden aber mit einer sinusförmigen Wechselspannung $u_0(t)$ versorgt und dienen dem Vergleich von Impedanzen (Wechselstromwiderständen). Damit können z.B. Kondensatoren oder Induktivitäten, bzw. R-L-C-Schaltungen gemessen werden [25][27][28][32].

Benutzen wir die komplexe Schreibweise für Wechselstromgrößen, also für

$$\begin{aligned} \text{Spannung} \quad U &= |U| \cdot e^{j\varphi_U} \\ \text{Strom} \quad I &= |I| \cdot e^{j\varphi_I} \quad , \\ \text{Widerstand} \quad Z &= |Z| \cdot e^{j\varphi_Z} \end{aligned} \quad (222)$$

dann ist der jeweiligen Größe ein Betrag und eine Phase, oder ein Real- und ein Imaginärteil zugeordnet. Dann gilt für eine Wechselstrombrücke ebenso die Abgleichbedingung

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_x}, \quad (223)$$

wobei diese prinzipiell genauso aufgebaut ist, wie die Gleichstrombrücken in Bild 70 und Bild 72.

Jetzt muß aber, um die komplexe Brückendiagonalspannung $U_d=0$ werden zu lassen, die Abgleichbedingung durch zwei Größen erfüllt sein, entweder durch Betrag und Phase von U_d oder durch Real- und Imaginärteil von U_d . D.h., es ergeben sich zwei Gleichungen

$$\left. \begin{matrix} \operatorname{re}(U_d) = 0 \\ \operatorname{im}(U_d) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \operatorname{re}(Z_X) \\ \operatorname{im}(Z_X) \end{matrix} \right. \quad (224)$$

für die unbekanntenen Größen Real- und Imaginärteil von Z_X . Trennen wir die Impedanzen Z_i in Real- und Imaginärteile $R_i + jX_i$, dann ergeben sich die Abgleichbedingungen [25]

$$R_2 R_3 - X_2 X_3 = R_1 R_X - X_1 X_X \quad (225)$$

$$X_2 R_3 + R_2 X_3 = X_1 R_X + R_1 X_X. \quad (226)$$

Benutzen wir die Polarkoordinatendarstellung, dann ergeben sich die Abgleichbedingungen [25]

$$|Z_2||Z_3|e^{j(\varphi_2+\varphi_3)} = |Z_1||Z_X|e^{j(\varphi_1+\varphi_X)} \quad (227)$$

Hier müssen das Produkt der Beträge und die Summe der Winkel übereinstimmen:

$$|Z_2||Z_3| = |Z_1||Z_X| \quad (228)$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_X \quad (229)$$

Bei dem Abgleich einer Wechselstrombrücke sind also zwei Abgleichbedingungen zu erfüllen. Die Brücke braucht dementsprechend mindestens zwei unabhängige Eingriffsmöglichkeiten, also zwei einstellbare Komponenten. Diese sind in der Regel abwechselnd zu betätigen.

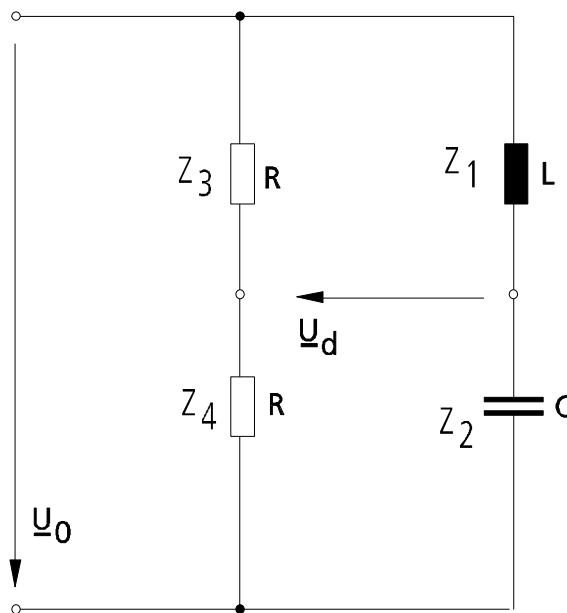


Bild 76: Beispiel einer nicht abgleichbaren Wechselstrombrücke

Für den Abgleich kann, da nun mit Wechselstrom gearbeitet wird, als Nullinstrument kein Galvanometer oder anderes Gleichspannungsinstrument eingesetzt werden. Diese würde, bei ausreichender Trägheit, stets $u_d(t)$ mitteln und bei Wechselspannung damit Null anzeigen. Effektivwertinstrumente oder Instrumente mit Gleichrichter könnten eingesetzt werden, aber das Finden des Nullwertes erweist sich oft als schwierig, da der Ausschlag nicht mehr mit der "Abgleichrichtung" übereinstimmt. Deswegen wird der Abgleich häufig, bei manuellem Abgleich, mittels eines Oszilloskops durchgeführt. Besser und bei automatischem Abgleich

unumgänglich ist die Umformung von u_d in eine Gleichspannung, deren Polarität wechseln kann. Erreichbar ist dies mit einem phasenselektiven Gleichrichter (siehe dort).

Nicht jede mögliche Zusammenschaltung von insgesamt vier R-L-C-Kombinationen führt zu einer abgleichbaren Brücke. So kann z.B. die Schaltung nach Bild 76 nicht abgeglichen werden. Dies läßt sich bereits an einer Kontrolle der Phasenlagen in den beiden Brückenzeigen verifizieren: Die Winkel φ_1 und φ_2 haben entgegengesetztes Vorzeichen, die Winkel φ_3 und φ_4 sind Null, so daß die Abgleichbedingung Gl.(229) nicht zu erfüllen ist.

Für spezielle Meßanwendungen wurden verschiedene Meßbrücken entwickelt. Einige werden nachfolgend beschrieben [25][28], weitere sind in [32] aufgeführt.

Wechselstrommeßbrücke nach Wien

Diese Meßbrücke ist besonders als Kapazitätsmeßbrücke geeignet. Im einem Brückenzeig befindet sich die unbekannte Kapazität C_2 von der angenommen wird, daß parallel dazu ein Verlustwiderstand R_2 liegt (Bild 77). Dieses Ersatzschaltbild ist als Vergleichsgröße durch die Parallelschaltung C_1 mit R_1 nachgebildet.

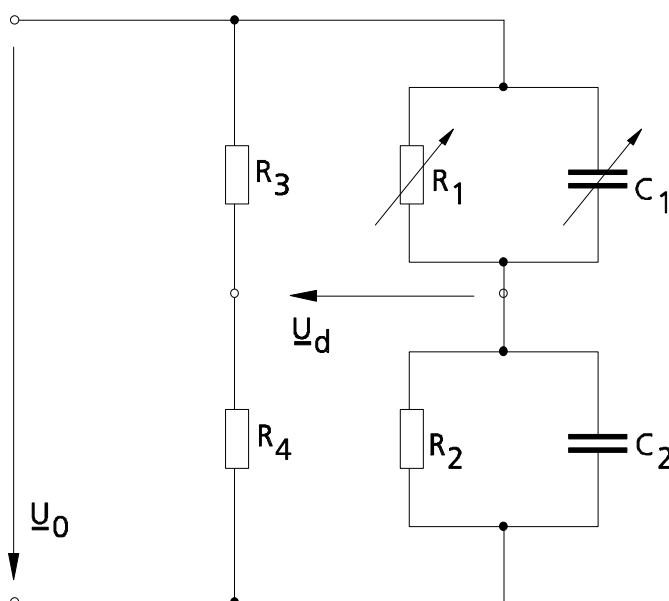


Bild 77: Wechselstrommeßbrücke nach Wien zum Messen des unbekanntes Kondensators C_2

Die Vergleichsgrößen sind veränderbar und damit die Brücke abstimmbare. Es gilt bei abgestimmter Brücke

$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1 \quad (230)$$

$$C_2 = \frac{R_3}{R_4} C_1 \quad (231)$$

Daraus läßt sich auch der Verlustfaktor

$$\tan \delta_1 = \frac{1}{\omega C_1 R_1} = \frac{1}{\omega C_2 R_2} = \tan \delta_2 \quad (232)$$

des Kondensators berechnen.

Zeigen C_2 und R_2 eine Abhängigkeit der Frequenz, dann stimmt das Ersatzschaltbild aus der Parallelschaltung von R und C nicht. In diesem Fall ist als Ergebnis die Frequenzabhängigkeit mit anzugeben oder eine andere Meßschaltung (Ersatzschaltung) zu wählen. Die Brückenschaltung ändert sich damit aber auch.

Wechselstrombrücke nach Maxwell

Analog zur Kapazitätsmeßbrücke nach Wien läßt sich auch eine Induktivitätsmeßbrücke (nach Maxwell) aufbauen (Bild 78). Hier wird die unbekannte Spule als Reihenschaltung einer Induktivität L_2 und eines Widerstandes R_2 angenommen.

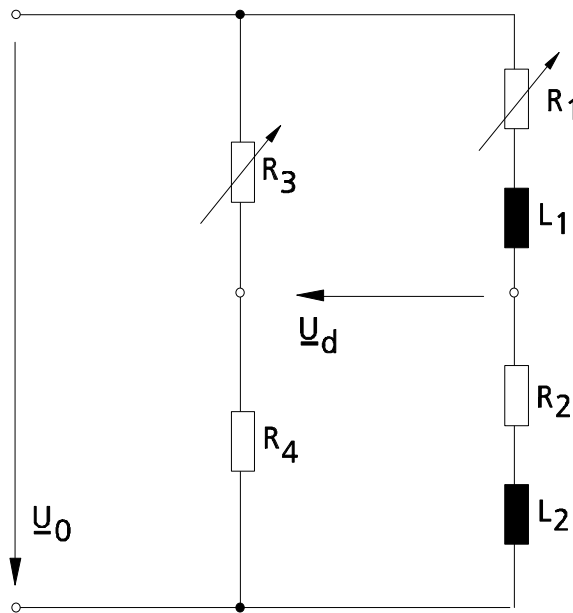


Bild 78: Wechselstrommeßbrücke nach Maxwell zum Messen von Induktivitäten.

Aus der Abgleichbedingung Gl.(224) folgen die Bestimmungsgleichungen für die unbekannte Induktivität

$$L_2 = \frac{L_1 R_4}{R_3} \tag{233}$$

und deren Serienwiderstand

$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1 \tag{234}$$

Nachteilig bei dieser Schaltung ist, daß die Referenzinduktivität L_1 von sehr hoher Güte sein muß, was bei Spulen schwerer realisierbar ist, als bei Kondensatoren. Deshalb wird L_1 auch nicht abstimmbare ausgeführt und statt dessen der Abgleich über R_3 vorgenommen. Das Modell - die Ersatzschaltung - aus Reihenwiderstand und -induktivität entstammt der Vorstellung des widerstandsbehafteten Spulendrahtes. Dies trifft bei den meisten Spulen, insbesondere mit Eisenkern, nicht zu. Zu den Verlusten im Drahtwiderstand kommen Wirbelstromverluste im Eisenkern und Kapazitäten zwischen den benachbarten Windungen. Die Wirbelstromverluste [39][43] können u.U. als Parallelwiderstand zu L_1 und R_1 betrachtet werden, während die Wicklungskapazitäten, je nach Feinheit des Modells, nahezu beliebig

komplexe Schaltungen erfordern. Der Einfluß hängt ab von dem Verhältnis des Blindwiderstandes der Wicklungskapazität zum Blindwiderstand der Induktivität, mithin also auch vom Frequenzbereich. Ggf. sind so die gemessenen Größen L_2 und R_2 als frequenzabhängig zu betrachten oder in ein anderes Ersatzschaltbild umzurechnen.

Wechselstrombrücke nach Maxwell-Wien

Aufgrund der Gegebenheit, daß sich Kapazitäten mit Kondensatoren hoher Güte besser aufbauen lassen als Induktivitäten aus Spulen, mit geringerer Güte und, wie bei der Maxwellbrücke beschrieben mit parasitären Nebeneffekten, läßt sich die sog. Dualität in den Ersatzschaltungen für eine Induktivitätsmeßbrücke ausnutzen, die über Kapazitäten abgeglichen wird (Bild 79). Die Dualität besteht hierbei zwischen der Impedanz Z (Widerstand) aus der Reihenschaltung aus L und R , sowie der Admittanz Y (Leitwert) aus der Parallelschaltung von R und C . Beide weisen die selbe formale Struktur auf:

$$Z = R + j\omega L \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{1}{R} + j\omega C. \tag{235}$$

Dadurch, daß in der Brückengleichung Gl.(223) Quotienten gebildet werden, lassen sich die Admittanzen formal mit Impedanzen vergleichen.

Aus der Abgleichbedingung Gl.(223) lassen sich wieder die Bestimmungsgleichungen für die Induktivität

$$L_2 = R_1 R_4 C_3 \tag{236}$$

und den Reihenwiderstand

$$R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3} \tag{237}$$

herleiten.

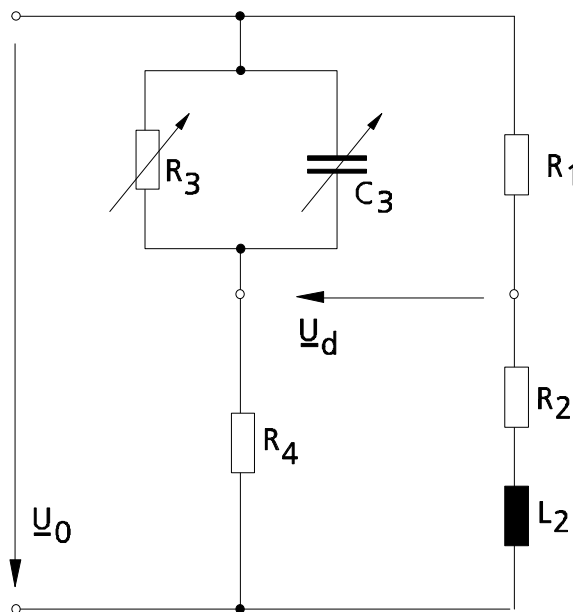


Bild 79: Wechselstrommessbrück nach Maxwell-Wien zur Messung von Induktivitäten über den Vergleich mit Kapazitäten.

Für die Gültigkeit des Modells aus der Reihenschaltung L und R gilt natürlich die selbe Einschränkung, wie bereits bei der Maxwellbrücke diskutiert.

2.3 Messen elektrischer Größen mit Kompensationsverfahren

Lernziel: Kompensation als Sonderform der Brücke; Anwendungen

2.3.1 Kompensatoren

Lernziel: Kompensatorschaltung für Spannungsmessung

Kompensatoren gleichen in der Handhabung der Wheatstone'schen Brücke. Wir sprechen von Kompensation, wenn der Wert einer physikalischen Größe dadurch bestimmt wird, daß eine gleichgroße Größe gleicher Größenart so entgegengehalten wird, daß sich die Wirkung beider Größen aufhebt. Dieses "Entgegengehalten" kann manuell oder selbsttätig erfolgen [29][32]. Im letzten Fall sprechen wir auch von automatischer Kompensation, wie sie bereits bei den Kreisstrukturen besprochen wurde (siehe dort). Im Prinzip ist dies genau so bei der Wheatstonebrücke der Fall. Dort werden Spannungen verglichen und solange abgeglichen, bis die beiden Spannungen in den Brückenzweigen sich aufheben.

Bild 80 zeigt einen Spannungskompensator zum Messen einer unbekanntenen Spannung U_x . Der Präzisionswiderstand R kann verstellt werden und damit die Referenzspannung U_0 so weit heruntergeteilt werden, bis das Nullinstrument (Galvanometer), genau so, wie bei der Meßbrücke, die Spannungsdifferenz $U_x - U_{vgl} = 0$ anzeigt. Der Spannungsteiler R, der sich aus den beiden Teilwiderständen R_{oben} und R_{unten} zusammensetzt, wird im abgeglichenen Zustand nicht belastet, da über das Galvanometer kein Strom fließt. Somit gilt die Beziehung des unbelasteten Spannungsteilers:

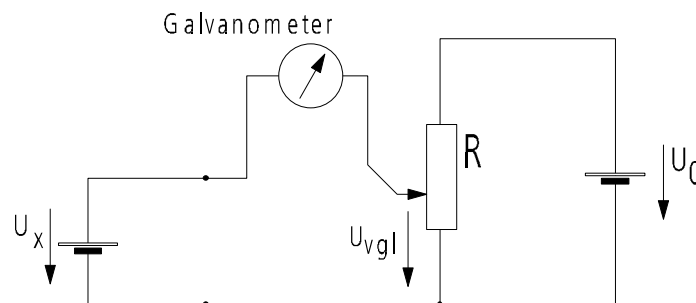


Bild 80: Prinzipbild eines Spannungskompensators zum Messen der unbekanntenen Spannung U_x .

$$U_{vgl} = U_0 \frac{R_{unten}}{R} = U_x. \tag{238}$$

Setzen sich die Widerstände am Potentiometer als "Drahtlängen", d.h. Gesamtlänge l_0 (entspricht R an U_0) und Teillänge l_{vgl} (entspricht R_{unten} an U_{vgl}), zusammen, dann läßt sich Gl.(238) auch schreiben als

$$U_x = U_0 \cdot \frac{l_{vgl}}{l_0}. \tag{239}$$

Damit läßt sich die unbekanntene Spannung, bei entsprechender Skalierung, indirekt als Weg oder Drehwinkel der Potentiometerachse ablesen. U_0 muß dabei aber konstant und bekannt

sein. Die unbekannte Spannungsquelle U_x bleibt bei Abgleich unbelastet, d.h. keine Rückwirkung des Meßgerätes auf die Meßgröße.

2.3.2 Meßschreiber

Lernziel: Meßschreiber im Ausschlags- und Kompensationsverfahren

Bisher hatten wir in erster Linie nur anzeigende elektrische Meßinstrumente betrachtet. Oft liegt aber die Aufgabe vor, Meßergebnisse über der Zeit oder als von einer anderen abhängige Größe zu dokumentieren. Statt einer laufenden Beobachtung kann diese Meßaufgabe von einem registrierenden Meßgerät vorgenommen werden. Heute gibt es neben den klassischen, nachfolgend beschriebenen Kompensationsschreibern auch elektronische, digitale Verfahren. Bei diesen wird die Meßgröße mittels AD-Wandler in ein Digitalsignal umgewandelt und dann elektronisch gespeichert, weiterverarbeitet und ggf. als Zahlenkolonne oder Graphik ausgedruckt. Diese Verfahren sollen nachfolgend aber nicht Gegenstand der Betrachtung sein.

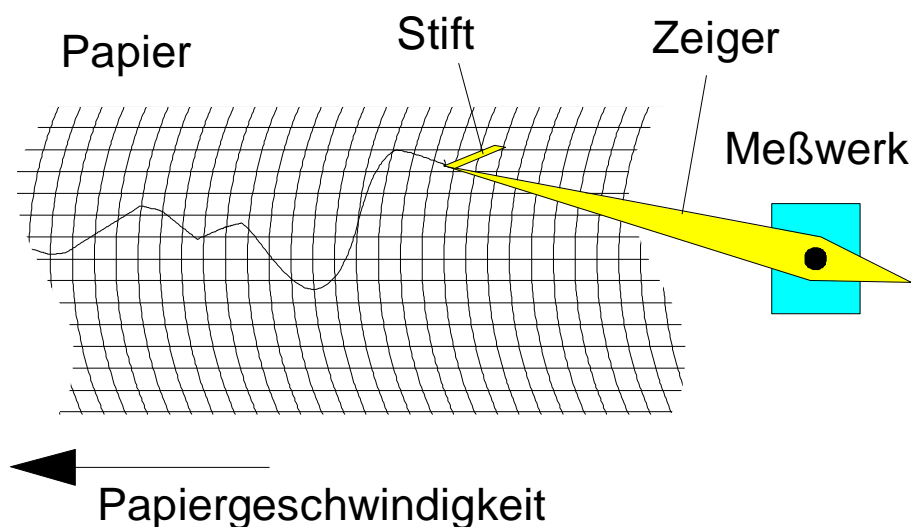


Bild 81: Meßschreiber mit Meßwerk und ausgelenktem Zeiger mit bewegtem Papierstreifen

Bei den schreibenden (registrierenden) Meßinstrumenten kann als erster Schritt natürlich ebenso verfahren werden. Wie bei den mechanischen Anzeigen, indem an die Zeigerspitze ein "Schreiber" angebracht wird. Ein solcher Zeiger kann beispielsweise einen Kohle-/Filzstift/Tintenschreiber tragen und über ein Papierstreifen konstanter Verschiebegeschwindigkeit gleiten, sog. x-t-Schreiber (Bild 81). Hier sind aber sofort zwei Nachteile erkennbar. Erstens ist das Schreiben mit Abrieb und damit auch mit Reibung verbunden. Über die Zeigerlänge wirkt die Reibung undefiniert als großes Reibmoment auf das Meßwerk und mindert stark die Qualität des Meßwertes. Zweitens bewegt sich der Stift auf einem Kreisbogen, so daß ein spezielles, auf den Radius des Zeigers abgestimmtes, Papier erforderlich ist. Diese Nachteile können z.B. mit einem "optischen Stift", der auf lichtempfindliches Papier schreibt, umgangen werden (Lichtstrahlschreiber). Dafür ist aber der Umgang mit dem Photopapier sehr aufwendig (Dunkellagerung, Entwicklung). Der Schreiber mit Meßwerk ist deshalb nur dort eingesetzt, wo genügend Energie für das Meßwerk, i.d.R. ein Drehspulmeßwerk, zur Verfügung steht, z.B. nach einem Meßverstärker und nur kleine Auslenkungen erfolgen. Bei Mehrkanalschreibern, wo mehrere solcher Anordnungen parallel

liegen und auf einen gemeinsamen Papiertreifen schreiben, ist das Verfahren gebräuchlich (Beispiel: EEG = Elektroenzephalograph).

Bei Meßschreibern mit großer Auslenkung und hoher Auflösung wird fast ausnahmslos ein Kompensationsverfahren verwendet. Es handelt sich hier um sog. Kompensationsschreiber oder Schreiber mit Servoantrieb [29]. Der Schreibstift überstreicht eine Zeichenfläche in ein oder zwei Dimensionen. Sind x- und y-Auslenkung mittels externem Signal ansteuerbar, sprechen wir von einem x-y-Schreiber. Ist y auf die Zeit begründet, wird also nur x angesteuert, sprechen wir von einem x-t-Schreiber. Es gibt sie in ein oder mehrkanaliger Ausführung.

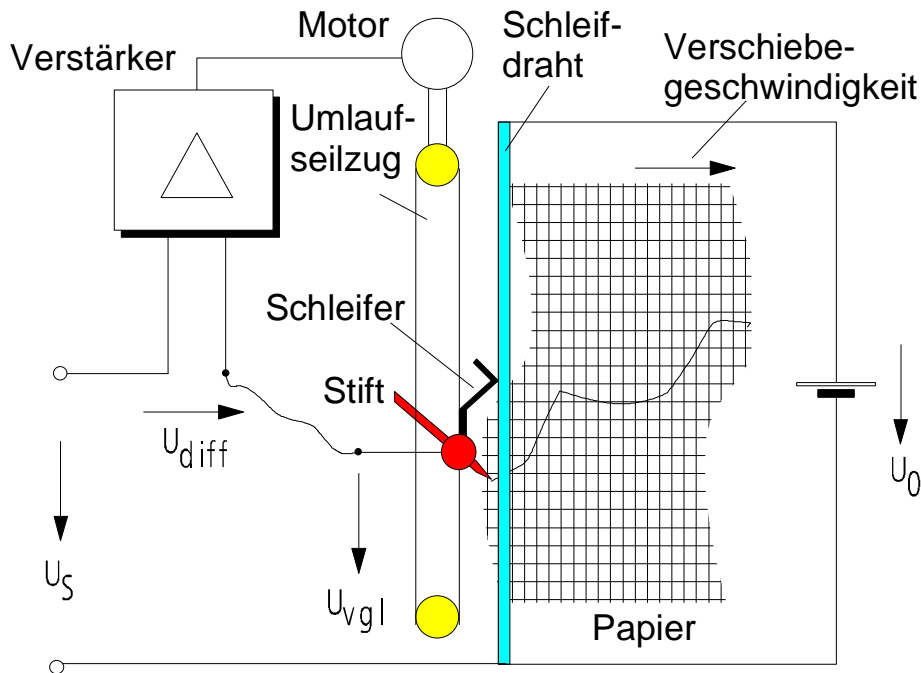


Bild 82: Prinzip eines Meßschreibers (x-t-Schreiber) mit Servoantrieb (Kompensationsschreiber)

Bild 82 zeigt das Prinzip eines Kanals eines solchen Kompensationsschreibers. Es gleicht dem im vorhergehenden Kapitel besprochenen Kompensator, verfügt allerdings über einen selbsttätigen Abgleich (automatische Kompensation). Von der Struktur entspricht dies einer Kreisstruktur (siehe dort). Die unbekannte Meßspannung (Steuerspannung) U_S wird mit einer Vergleichsspannung U_{vgl} verglichen, die, wie beim Kompensator, aus einem Spannungsteiler gewonnen wird. Die Spannung U_0 wird über einen Drahtwiderstand (Schleifdraht) heruntergeteilt, so daß gemäß Gl.(239) sich die Vergleichsspannung U_{vgl} aus dem Längenabgriffen, also aus der Position des Schreibstiftes ergibt und über einen Schleifer abgegriffen wird. Die Differenz aus Steuerspannung und Vergleichsspannung $U_{diff}=U_S-U_{vgl}$ wird einem Verstärker (allgemeiner einem Regler) zugeführt und damit ein elektrischer Servomotor angesteuert. Dieser verschiebt über einen Seilzug den Stift solange, bis sich $U_{diff}=0$ einstellt. Der Stift nimmt damit eine Position an, die dem zu U_S gehörenden Anzeigewert entspricht. Reibungskräfte spielen hier nahezu keine Rolle mehr. Die Gestaltung des Reglers wird mit den regelungstechnischen Methoden vorgenommen.

2.4 Messen elektrischer Größen mit elektronischen Mitteln

Lernziel: Elektronische Grundelemente wie Meßverstärker, Operationsverstärker, Gleichrichtung, AD-Wandlung

2.4.1 Meßverstärker, Operationsverstärker

Lernziel: Operationsverstärker: Eigenschaften, Modelle, Grundsaltungen, Meßverstärker, Anwendungen

2.4.1.1 Eigenschaften des Operationsverstärkers

Verstärker sind in der elektrischen Meßtechnik von besonderer Bedeutung. Viele Meßeffekte liefern nur kleine Signale, z.B. in Form von elektrischen Spannungen, Strömen oder deren Änderung, so daß sie zur Anzeige oder Weiterverarbeitung verstärkt werden müssen. Früher wurden Verstärker mit Elektronenröhren aufgebaut, später dann mit diskreten Halbleiterbauelementen und heute überwiegend als integrierte Halbleiterschaltung. Wichtigste Elemente des Verstärkers sind die Transistoren, die in unterschiedlichster Form in integrierten Schaltungen auftreten, z.B. als Bipolartransistor (pnp und npn), Feldeffekttransistor (FET) oder in MOS-Technologie. Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Verstärkerschaltungen [37][36][44], die meist für konkrete Anwendungen geeignet sind.

Für die Meßtechnik wird heute, von Ausnahmen abgesehen, überwiegend der Operationsverstärker, kurz OpV (engl. OpA Operational Amplifier), eingesetzt. Dies ist ein Universalverstärker, der für seine speziellen Aufgaben durch äußere Beschaltung, z.B. mit Widerständen, Kondensatoren oder einfachen Halbleiterbauelemente, konditioniert wird. Damit können mit einem Verstärkertyp viele Anwendungen durchgeführt werden. Durch die einheitliche Bauart werden von vielen Halbleiterherstellern Operationsverstärker angeboten. Im inneren Aufbau durchaus unterschiedlich und mit unterschiedlich akzentuierten Eigenschaften sind sie doch alle prinzipiell ähnlich.

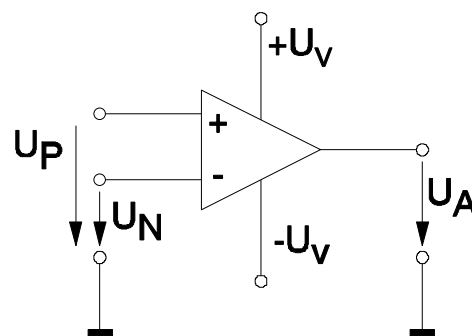


Bild 83: Schaltsymbol eines Operationsverstärkers (OpV) mit Ein-/Ausgangsgrößen

Wie muß nun ein solcher OpV beschaffen sein? Bild 83 zeigt das Schaltsymbol, an dem die wesentlichen Eigenschaften bereits diskutiert werden können. Außer der Spannungsversorgung, i.d.R. als erdsymmetrische Spannung $+U_V$ und $-U_V$ (wird in Schaltbildern meist nicht dargestellt, da sie grundsätzlich vorhanden sein muß) zur gemeinsamen Signal- und Versorgungsmasse GND, besitzt der OpV zwei Eingänge, U_N und U_P (auch als N-, bzw. P-Eingang bezeichnet), und einen Ausgang U_A . Die Ausgangsspannung ergibt sich zu

$$U_A = V \cdot (U_P - U_N) = V \cdot U_D, \tag{240}$$

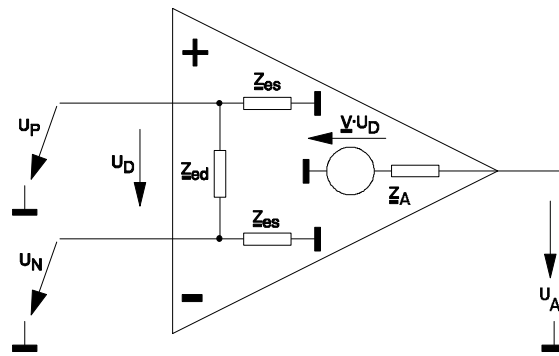


Bild 84: Vereinfachtes Ersatzschaltbild eines Operationsverstärkers

d.h. die Differenzspannung U_D am Eingang wird mit dem Faktor V verstärkt. Als Ersatzschaltung für diesen Zusammenhang können wir, trotz starker Vereinfachung oft gültig, Bild 84 verwenden. Der Eingangskreis, realisiert mit einer Transistordifferenzverstärkerstufe, zeigt sich von außen betrachtet mit Eingangsimpedanzen Z_{es} gegen die Masse der Versorgungsspannung und einer Eingangsimpedanz Z_{ed} zwischen den Signaleingängen U_P und U_N . Die Ausgangsspannung U_A wird durch eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle $\underline{V}U_D$ aufgebaut, die über die Ausgangsimpedanz Z_A abgreifbar ist. Die Spannungsquelle ist natürlich auch mit Transistorschaltungen realisiert.

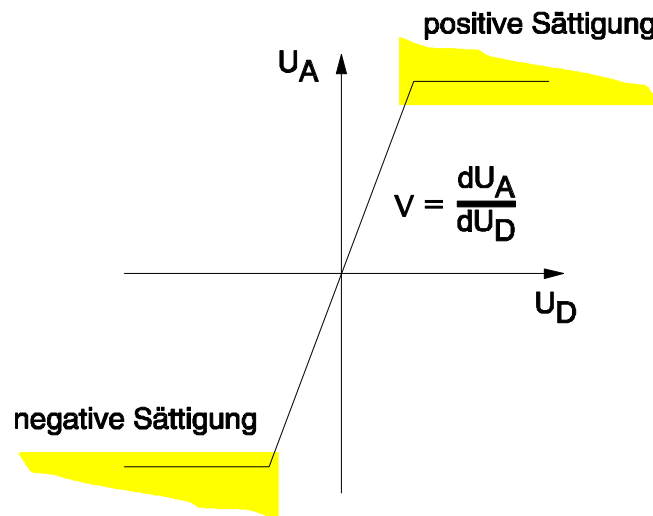


Bild 85: Statische Kennlinie eines Operationsverstärkers

Die Ausgangsspannung kann natürlich die Versorgungsspannung nicht übersteigen. Abweichend von Gl.(240) ergibt sich nahe der Versorgungsspannungen eine Begrenzung (Sättigungswert), wie in der statischen Kennlinie Bild 85 dargestellt ist. Nur im mittleren Bereich, dem Betriebsbereich, ergibt sich ein linearer Zusammenhang mit der Steilheit (Steigung) entsprechend der Verstärkung. Da die Verstärkung V beim OpV extrem hoch ist, entspricht die Skalierung der U_D -Achse (Abszisse) in Bild 85 dem Millivoltbereich, während die Skalierung der U_A -Achse im Voltbereich liegt. Typischerweise werden OpV mit $-10V/+10V$..- $15V/+15V$ versorgt. Durch die Ausgangsstufen des Verstärkers sind allerdings die Versorgungsspannungswerte von U_A nicht erreichbar, d.h. die Sättigungswerte liegen unterhalb der Versorgungswerte. Die Aussteuergrenze liegt etwa 2V unter dem Spannungsversorgungswert [37].

Das Übertragungsverhalten nach Gl.(240) gilt nur idealisiert. Für zunehmende Frequenz des zu verstärkenden Signals ist eine Veränderung in der Verstärkung und eine Phasenverschiebung zu beobachten. Dies drückt sich in den Wechselstromeigenschaften des Verstärkers in den komplexen Größen des Modells Bild 84 aus. Die Ursachen liegen in den Kapazitäten der Verstärkerstufen, die mit den vorhandenen Widerständen Tiefpässe bilden.

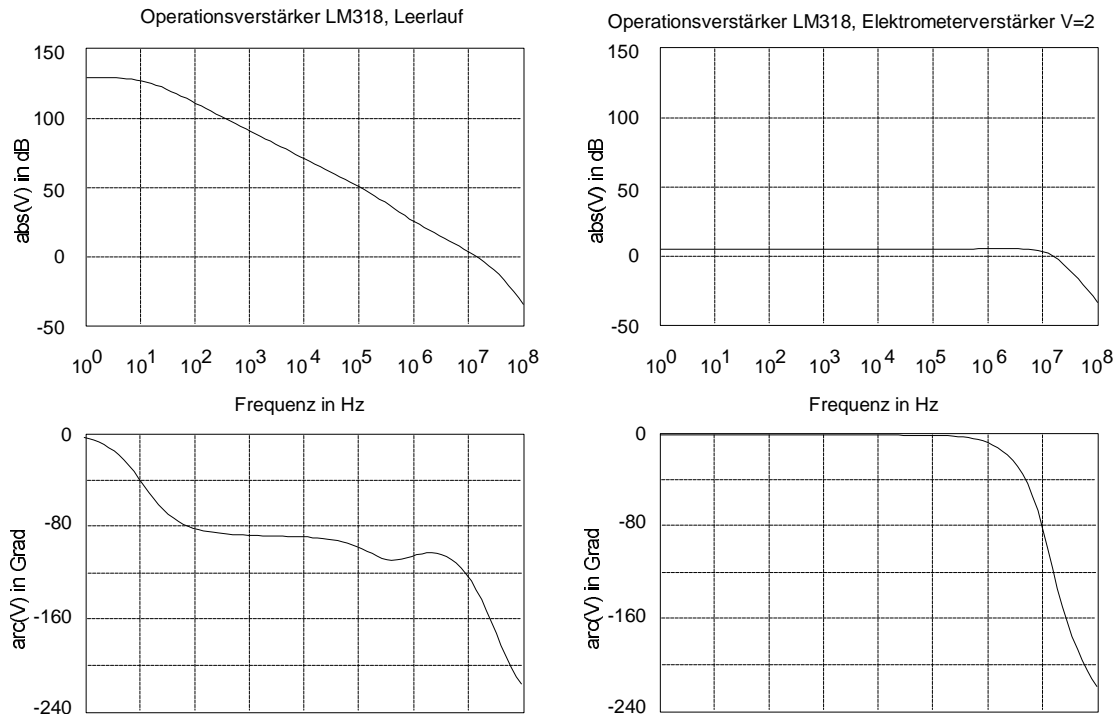


Bild 86: Bodediagramme (Frequenzgänge, oben Verstärkung in dB als $f(f)$, unten Phasendrehung in Grad als $f(f)$) eines Operationsverstärkers, links im Leerlauf (ohne äußere Beschaltung), rechts als Elektrometerverstärker mit Verstärkungsfaktor 2 (SPICE-Simulation, Modell LM318, National Semiconductor).

Tragen wir die Verstärkung bei harmonischer Erregung als Ausgangs-zu Eingangsgröße über der Frequenz f auf, dann ergibt sich ein Bodediagramm. Bild 86 links zeigt das Bodediagramm eines Operationsverstärkers ohne Beschaltung. Bei kleiner Frequenz ist die Verstärkung hoch (ca. 130dB) und nimmt mit zunehmender Frequenz ab (Bild 86 links oben). Ebenso stellt sich eine Phasenverschiebung ein (Bild 86 links unten).

2.4.1.2 Kenngrößen integrierter Operationsverstärker

Wir haben bereits festgestellt, daß ein realer, als integrierter Schaltkreis vorliegender OpV nicht vollständig durch Gl.(240) beschrieben wird. Aufgrund endlichen Leistungsvermögens der beteiligten Bauelemente (Transistoren) ergeben sich hiervon abweichende Eigenschaften, die von den Herstellern in Kenndaten im Datenblatt angegeben werden.

Die unterschiedlichen Typen von OpV sind oft für spezielle Anwendungen entwickelt worden. Anhand der Kennwerte in Datenblättern integrierter OpV kann der passende Typ ausgewählt werden. Die Kenngrößen sind stets auf einen bestimmten Umgebungstemperaturbereich und auf vorgegebene Versorgungsspannungen bezogen. Einige wichtige in Datenblättern vorkommenden Größen sind [44]:

Eingangsruhestrom I_I
(input bias current)

Der Eingangsruhestrom ist der arithmetische Mittelwert

$$I_I = \frac{I_{IP} + I_{IN}}{2} \tag{241}$$

der Arbeitspunktbasisströme (Bild 87). Diese fließen in den P-, bzw. N-Eingang des OpV und sind die Ströme, die jeweils für P oder N $U_A=0$ erzwingen.

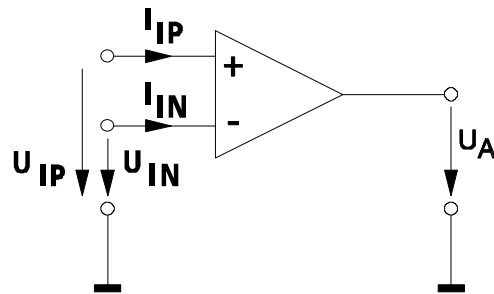


Bild 87: Eingangsgrößen beim Operationsverstärker

Eingangs-Offsetstrom I_{IO}
(input offset current)

Der Eingangs-Offsetstrom

$$I_{IO} = (I_{IN} - I_{IP}) \text{ für } U_A = 0 \tag{242}$$

ist derjenige Differenzstrom am Eingang (Bild 87), der dazu nötig ist, daß die Ausgangsspannung U_A des Operationsverstärkers Null wird.

Eingangs-Offsetspannung U_{IO}
(input offset voltage)

Die Eingangs-Offsetspannung des Operationsverstärkers

$$U_{IO} = (U_{IN} - U_{IP}) \text{ für } U_A = 0 \tag{243}$$

ist diejenige Differenzspannung am Eingang, die dazu nötig ist, daß die Spannung U_A des Verstärkers zu Null wird.

temperaturabhängige Eingangsspannungsdrift u_{IO}
(input offset voltage drift)

Eine Umgebungstemperaturänderung ΔT führt zu einer Änderung der Eingangs-Offsetspannung. Der in Datenblättern angegebene Wert ist auf 1°C bezogen:

$$u_{IO} = \frac{\Delta U_{IO}}{\Delta T} \tag{244}$$

Sie ist nichtlinear von der Temperatur abhängig und gilt nach Gl.(244) nur für einen eingeschränkten Temperaturbereich [44], bzw. wird als deren Mittelwert angegeben (average input offset voltage drift).

Leerlauf-Spannungsverstärkung V_{u0}

(open loop voltage gain)

Die Leerlauf-Spannungsverstärkung ist die bei unbelastetem Ausgang und eingangsseitig anliegendem Differenzsignal gemessene Spannungsverstärkung

$$V_{u0} = \frac{U_A}{U_D} \quad (245)$$

des nicht gegengekoppelten OpV im Niederfrequenzbereich. Da die Übertragungskennlinien nichtlinear sind, hängt der Wert von der Aussteuerung ab. Mit Rücksicht darauf ist es üblich, die Großsignal-Spannungsverstärkung (large voltage gain) anzugeben, die sich bei großer Aussteuerung ($\pm 5V.. \pm 10V$), aber ohne Übersteuerung, einstellt.

Gleichtakt-Spannungsverstärkung V_{uc0}

(common mode voltage gain)

Die Gleichtakt-Spannungsverstärkung ist die bei unbelastetem Ausgang und eingangsseitig anliegendem Gleichtaktsignal gemessene Spannungsverstärkung

$$V_{uc0} = \left| \frac{U_A}{U_{DG}} \right|. \quad (246)$$

Hierbei ist $U_D=0$, d.h. der P- und der N-Eingang sind zusammengeschaltet und werden gemeinsam mit U_{DG} gespeist.

Gleichtakt-Spannungsunterdrückung a_{uc0}

(common mode rejection ratio)

Die Gleichtakt-Spannungsunterdrückung ist der bei niederen Frequenzen gemessene Quotient von Differenz- und Gleichtakt-Spannungsverstärkung

$$a_{uc0} = \left| \frac{V_{u0}}{V_{uc0}} \right|. \quad (247)$$

In den Datenblättern erscheint diese Größe meistens als Gleichtaktunterdrückung und wird i.d.R. in dB angegeben.

Eingangsimpedanz, Eingangswiderstand $Z_{ed,r}$, R_{ed}

(input impedance, input resistance)

Der in den Datenblättern angegebene Eingangswiderstand entspricht - falls nicht anders gekennzeichnet - stets der Differenz-Eingangsimpedanz Z_{ed} (Bild 84)

$$Z_{ed} = \frac{U_D}{I_d}. \quad (248)$$

In erster Näherung setzt sie sich aus dem Eingangswiderstand R_{ed} und der Eingangskapazität zusammen. Der Betrag von Z_{ed} nimmt mit wachsender Frequenz ab. Im Niederfrequenzbereich läßt sich Z_{ed} durch R_{ed} näherungsweise beschreiben.

Ausgangsimpedanz, Ausgangswiderstand Z_A , R_A

(output impedance, output resistance)

Der Ausgangswiderstand beschreibt den Innenwiderstand der spannungsgesteuerten Spannungsquelle (Bild 84) und wird durch Belastung gemessen:

$$R_A = -\frac{\partial U_A}{\partial I_A}. \quad (249)$$

Er ist frequenzabhängig und steigt bei hohen Frequenzen.

Herstellerangaben beziehen sich auf den Niederfrequenzbereich. Die Frequenzabhängigkeit ist i.d.R. durch Kennlinien gegeben.

Maximale Ausgangsspannung U_{Amax}
(output voltage swing)

Unter der maximalen Ausgangsspannung wird der maximale positive oder negative Scheitelwert der Ausgangsspannung verstanden (Bild 85), bei dem bei unbelastetem, oder definiert belastetem, Verstärkerausgang das Ausgangssignal verzerrungsfrei wiedergegeben wird. Die Scheitelwerte liegen üblicherweise 1..2V unterhalb der Versorgungsspannungen.

Maximaler Ausgangsstrom I_{Amax}
(maximum output current)

Der maximale Ausgangsstrom ist der positive oder negative Scheitelwert des Ausgangsstromes, der dem Verstärker entnommen werden darf. Viele OpV verfügen über einen Überlastschutz.

Die Überlastung rührt von einer Erwärmung der Ausgangsstufen. Durch den maximalen Strom erfolgt ein Leistungsumsatz (in Wärme) durch die Versorgungsspannung, d.h. den Spannungsabfall ΔU zwischen positiver (bei $I_A > 0$) oder negativer (bei $I_A < 0$) Versorgungsspannung, und Ausgangsspannung U_A und dem Ausgangsstrom I_A ($P = \Delta U I_A$). Maßgebend ist also nicht der niedrige Ausgangswiderstand R_A ($P = I_A^2 R_A$).

Bandbreite, Grenzfrequenz f_g
(open loop bandwidth)

Die Grenzfrequenz des Übertragungsbereiches ist die Frequenz, bei der die Leerlaufspannungsverstärkung um 3 dB gegenüber dem bei niedrigen Frequenzen gemessenen Wert gefallen ist (Bild 86 links). Da die Leerlaufverstärkung bei kleiner Frequenz sehr hoch ist, wird der Abfall schon bei kleinen Frequenzen erreicht. Der Wert ist aber bei gegengekoppelten Verstärkern wesentlich höher, da der Bezugswert dann i.allg. niedriger ist (z.B. Bild 86 rechts).

Einsverstärkungsfrequenz f_1
(unity gain frequency)

Die Einsverstärkungsfrequenz ist die Frequenz, bei der die Leerlaufspannungsverstärkung dem Betrage nach den Wert 1 annimmt. Diese Frequenz kennzeichnet die Frequenzabhängigkeit des OpV besser als die Grenzfrequenz f_g .

Verstärkungsbandbreitenprodukt

Produkt aus dem Verstärkungsfaktor (in der Mitte des zu übertragenden Bandes, mithin die Leerlauf-Spannungsverstärkung V_{u0}) und der Bandbreite f_g des Verstärkers. Durch die Tiefpaßcharakteristik des OpVs (Bild 86 links) wird die Bandbreite mit wachsender Verstärkung (Gegenkopplung) gesenkt (vgl. auch weiter unten). Bei idealem Tiefpaßverhalten 1.Ordnung (Absinken von $|V|$ mit 20dB/Dekade bei wachsender Kreisfrequenz ω), d.h.

$$|V| \sim \frac{1}{\omega}, \tag{250}$$

bleibt das Verstärkungsbandbreitenprodukt

$$V_{u0} \cdot f_g \sim \frac{1}{2\pi} f_g \tag{251}$$

sogar konstant, auch wenn unterschiedliche Gegenkopplungen erfolgen [27].

Anstiegsrate

(slew rate)

Die Anstiegsrate, oder Anstiegsgeschwindigkeit, ist die Steilheit des nicht übersteuerten Ausgangssignals U_A bei sprungförmiger Änderung des Eingangssignals. I.d.R. wird dies in einer Elektrometerschaltung gemessen. Es wird dabei die Steilheit der Sekante durch den 10%- und 90%-Wert (bezogen auf die Änderung von U_A) des Ausgangssignals genommen (Bild 88). Die Anstiegsrate ist ein Maß für die Schnelligkeit des OpVs und steht in einem Zusammenhang zu dessen Grenzfrequenz.

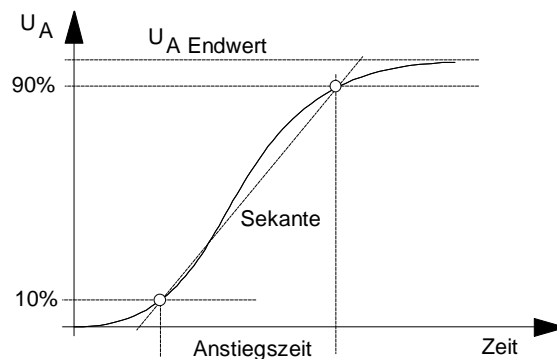


Bild 88: Zur Anstiegsgeschwindigkeit eines Ausgangssignals beim Operationsverstärker

Neben diesen Begriffen finden sich in den Datenblättern über integrierte OpV noch eine ganze Reihe weiterer Angaben, wie z.B. über das Rauschverhalten, auf die hier aber nicht mehr näher eingegangen werden. Detaillierte Beschreibungen dieser Parameter finden sich in [44], [36] und [37].

Kurz zusammengefaßt lassen sich für diverse Operationsverstärkerklassen und für die idealisierte Variante heute folgende Werte angeben (Tabelle 7):

Kenngröße	Einheit	idealer OpV	Bipolar-OpV	OpV mit FET-Eing.	Präz. OpV	Fast-OpV
Typischer Vertreter			μA741	TL051	OP177	EL2038
Leerlauf-Spannungsverstärkung		$\rightarrow \infty$	10^5	$2 \cdot 10^5$	10^7	$2 \cdot 10^4$
Gleichtaktunterdrückung		$\rightarrow \infty$	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	10^7	$3 \cdot 10^4$
Differenzeingangswiderstand	[Ω]	$\rightarrow \infty$	10^6	10^{12}	$5 \cdot 10^7$	10^4
Gleichtakteingangswiderstand	[Ω]	$\rightarrow \infty$	10^9	10^{14}	$2 \cdot 10^{11}$	10^7
Eingangsruhestrom	[A]	0	$80 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-12}$	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-6}$
Offsetspannung	[mV]	0	1	0,5	0,01	0,5
Offsetspannungsdrift	[μV/K]	0	6	10	0,1	20
Maximale Aussteuerbarkeit	[V]	$\rightarrow \infty$	±13	±13	±14	±12
Maximaler Ausgangsstrom	[mA]	$\rightarrow \infty$	±20	±20	±20	±50
Ausgangswiderstand	[Ω]	0	<1000	<100	<60	<30
-3dB-Bandbreite	[Hz]	$\rightarrow \infty$	10	30	0,06	$50 \cdot 10^3$
Verstärkungsbandbreiteprodukt	[MHz]	$\rightarrow \infty$	1	3	0,6	1000
Anstiegsrate	[V/μs]	$\rightarrow \infty$	0,6	18	0,3	1000

Tabelle 7: Kurze Zusammenstellung einiger Daten von Operationsverstärkern (Werte die Typen gelten bei einer Betriebsspannung von ±15V [36])

2.4.1.3 Grundbeschaltung

Aufgrund des nicht idealen Verhaltens von Operationsverstärkern sind, nahezu unabhängig von der eigentlichen Beschaltung, Maßnahmen zu ergreifen, um diese Einflüsse zu mindern.

Strom-, Spannungsversorgung

Speziell bei schnellen Operationsverstärkern ist bezüglich der Stromversorgung zu beachten, daß

- Störspannungen, also überlagerte hochfrequente Wechselspannung oder transiente Spannungsspitzen, sich auf die Ausgangsspannung auswirken;
- der Operationsverstärker bei schnellen Signalen kurzfristig einen hohen Strombedarf haben kann (laden von Eigenkapazitäten oder treiben der Last).

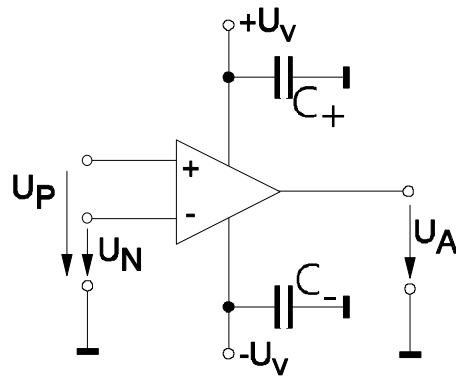


Bild 89: Stromversorgung eines Operationsverstärkers mit Pufferkondensatoren

Deswegen wird normalerweise in die unmittelbare Nähe des Operationsverstärkers zwischen die positive und negative Spannungsversorgung je ein Kondensator (C_+ und C_-) als "Energiepuffer" zum Abblocken von Spitzen (Blockkondensator) geschaltet (Bild 89). Dieser Kondensator muß an die transienten Störungen angepaßt sein, d.h. bei niederfrequenten Anwendungen kann ein Tantalelektrolytkondensator eingesetzt werden, bei hochfrequenten Anwendungen sind Schicht- oder Keramiktypen zu verwenden. Typische Werte für die Kapazitäten sind $50\text{nF}..1\mu\text{F}$.

Die Spannungsversorgung sollte normalerweise stabilisiert und frei von Wechselanteilen (z.B. 50Hz) sein.

Korrektur der Offsetspannung

Wie bereits bei der Eingangs-Offsetspannung beschrieben wurde benötigt ein realer OpV eine Differenzspannung am Eingang um $U_A=0$ zu erzeugen. Diese rührt von fertigungsbedingten Unsymmetrien her und ist daher nicht nur typ-, sondern auch exemplarabhängig. Sie wirkt sich besonders bei Verstärkern, auch gegengekoppelten, mit hoher Verstärkung aus.

Die OpVs verfügen über zwei Anschlüsse (Offsetkompensation), die mit einem Potentiometer, i.d.R. gegen Versorgungspotential, versehen werden können (Herstellerangaben beachten).

Bei invertierender Schaltung (Stromgegenkopplung, s.u.) kann ein Korrekturpotential, z.B. aus einem Spannungsteiler, auch über die Summationsstelle eingegeben werden (Bild 90). Das Potentiometer kann auch in drei Teilwiderstände Festwiderstand-Potentiometer-Festwiderstand zerlegt werden, so daß sich eine feinere Einstellmöglichkeit ergibt.

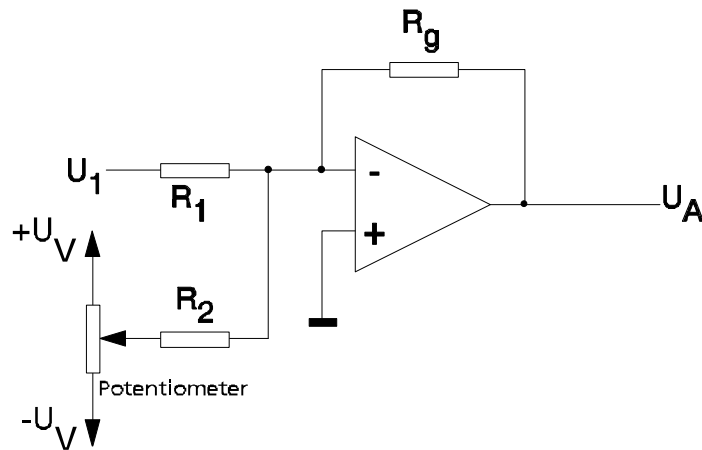


Bild 90: Korrektur der Offsetspannung in einer Summiererschaltung

Frequenzkompensation

Durch Gegenkopplung des Verstärkers (s.u.) kann es zu einer Mitkopplung kommen, wenn bei einer Frequenz, bei der eine Verstärkung > 1 vorliegt, sich eine Phasendrehung von -180° einstellt (vgl. Bild 86 links). Bei hoher Verstärkung kann der gegengekoppelte OpV dann zum Schwingen neigen, d.h. die Ausgangsspannung oszilliert. Der Hersteller empfiehlt, typabhängig, die zusätzliche Beschaltung mit R-C-Gliedern um eine Kompensation dieses Frequenzverhaltens zu bewirken. Näheres hierzu findet sich in [36], [37] und [44].

2.4.1.4 Elektrometerschaltung

Idealerweise hat der Operationsverstärker eine unendlich hohe Verstärkung (Tabelle 7) und ist damit für reale Anwendungen eigentlich ungeeignet. Denn kleinste Eingangsspannungen würden theoretisch unendlich hohe Ausgangsspannungen erzeugen.

Die Stärke des OpVs, und wir wollen uns jetzt nur mit dem idealen Typ beschäftigen, liegt in der Konfigurierbarkeit für Anwendungen durch eine einfache, externe Beschaltung die auf Gegenkopplungen basieren.

Betrachten wir zunächst die Spannungsgegenkopplung (Elektrometerschaltung). Ziel ist es, bei ansteigender Ausgangsspannung die Eingangsspannung zu verkleinern, so daß sich eine endliche, definierbare Verstärkung einstellt. Als Elektrometerverstärker (Bild 91 links) führen wir den Ausgang unmittelbar auf den N-Eingang zurück. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt dann

$$\sum U = 0 \Rightarrow -U_e + U_A + U_D = 0. \tag{252}$$

Lösen wir nach U_A auf und bilden den Verstärkungsfaktor des spannungsgegengekoppelten Verstärkers V_{SG} unter Verwendung der Beziehung $U_A=f(U_D)$ nach Gl.(240), dann erhalten wir

$$U_e = U_A + \frac{U_A}{V} = U_A \left(1 + \frac{1}{V}\right) \Rightarrow V_{SG} = \frac{U_A}{U_e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{V}} \tag{253}$$

Für den idealen OpV strebt dessen Leerlauf-Spannungsverstärkung V_{u0} , hier kurz V , gegen unendlich, so daß sich für den direkt gegengekoppelten Verstärker einen Verstärkungsfaktor nach Gl.(253) von

$$V_{SG} = \frac{U_A}{U_e} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow U_A = U_e \quad (254)$$

einstellt. Dieser Spannungsverstärker mit Verstärkungsfaktor Eins wird auch Impedanzwandler genannt, da er zwar die Eingangsspannung nicht verstärkt, aber einen sehr hohen Eingangswiderstand (ca. Z_{ed} , vgl. Tabelle 7) besitzt und damit die Signalquelle U_e kaum belastet. Auf der anderen Seite das Eingangssignal U_e über eine niederohmige Quelle (Z_A) als Ausgangsspannung U_A zur Verfügung stellt.

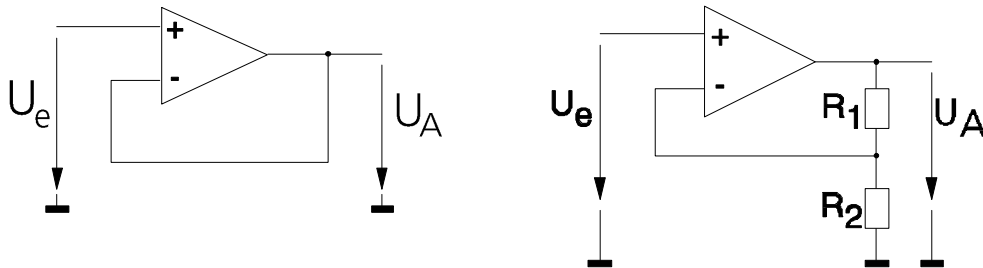


Bild 91: Operationsverstärker in Elektrometerschaltung;
links: Verstärkungsfaktor 1 (Impedanzwandler);
rechts: Verstärkungsfaktor > 1 .

Anstelle der direkten Spannungsgegenkopplung kann diese auch abgeschwächt über einen Spannungsteiler erfolgen (Bild 91 rechts). Mit dem selben Ansatz erhalten wir wieder aus der Maschengleichung

$$\sum U = 0 \Rightarrow -U_e + U_D + U_A \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 \quad (255)$$

Unter Verwendung von Gl.(240) erhalten wir jetzt für den Verstärkungsfaktor V_{SG}

$$V_{SG} = \frac{U_A}{U_e} = \frac{1}{\frac{1}{V} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{V}{1 + V \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad (256)$$

Für unterschiedliche Werte der Leerlauf-Spannungsverstärkung V erhalten wir die Ergebnisse

$$V_{SG} \rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{R_1}{R_2} > 1 & \text{für } V \rightarrow \infty \\ V & \text{für } V \rightarrow 0 \end{cases}, \quad (257)$$

also solange V sehr hoch ist (idealerweise unendlich) stellt sich eine Spannungsverstärkung > 1 ein. Bei kleinem V stellt sich der Wert V selbst ein. In Bild 86 rechts ist die Verstärkung eines realen Elektrometerverstärkers als Bodediagramm aufgetragen. Bei kleinen Frequenzen ist die Verstärkung 2, bzw. ca. 6 dB, d.h. $R_1=R_2$. Solange V (Bild 86 links) sehr hoch ist ($V \gg 6$ dB) folgt V_{SG} in Betrag ($abs(V)$) und Phase ($arc(V)$) streng Gl.(257) oben. Kommt V in die Größenordnung wie V_{SG} bei kleinen Frequenzen, dann "schmiegt" sich V_{SG} dem Verlauf von V , also der Verstärkung des nicht gegengekoppelten Verstärkers, an.

An diesem Beispiel ist deutlich der Zusammenhang Verstärkung und Bandbreite bei realen OpVs zu erkennen. Je höher V_{SG} gewählt wird, desto geringer wird die Bandbreite f_g , da sich der Bezugspegel verändert (s. Bandbreite, Verstärkungsbandbreiteprodukt).

Der Elektrometerverstärker mit Verstärkung > 1 zeichnet sich ebenfalls durch die Vorteile

- hohe Eingangsimpedanz
- keine Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal innerhalb des Übertragungsfrequenzbereiches, d.h. vorzeichenrichtige Wiedergabe.

aus.

Bei Anwendungen des Impedanzwandlers mit Signalleitungen, die an hochohmige Signalquellen angeschlossen sind, beispielsweise Quellen mit kapazitiven Innenwiderständen (Z_Q), tritt das Problem der Abschirmung auf, da Störungen leicht über parasitäre Kapazitäten C_p in eine offene Leitung einkoppelbar sind (Bild 92 oben).

Wird die Leitung geschirmt, z.B. als Koaxialleitung, bei der der Innenleiter das Signal führt, und der Außenleiter den Schirm darstellt, dann bilden sich die Kapazitäten ebenfalls aus, aber durch die feste Geometrie Außen- zu Innenleiter bleibt C_p konstant (Bild 92 Mitte). Normalerweise wird der Schirm geerdet, d.h. das Schirmpotential $U_U=0V$. Durch die geringen Abstände zwischen Innen- und Außenleiter kann C_p aber bezüglich C_0 groß und damit die Belastung der Signalquelle hoch sein (Signalverfälschung!).

Abhilfe schafft eine aktive Schirmung (Bild 92 unten), bei der das Schirmpotential durch den Impedanzwandler auf das Signalpotential nachgeführt wird [36]. Bei idealen Bedingungen gilt dann

$$U_U = U_M = U_S. \tag{258}$$

Die Kapazität C_p ist natürlich nach wie vor vorhanden, da sie nur durch die Geometrie der Leitung bestimmt wird, aber sie wird nicht mehr wirksam, da aufgrund der beidseitigen Potentialgleichheit nach Gl.(258) kein Strom durch C_p fließen kann.

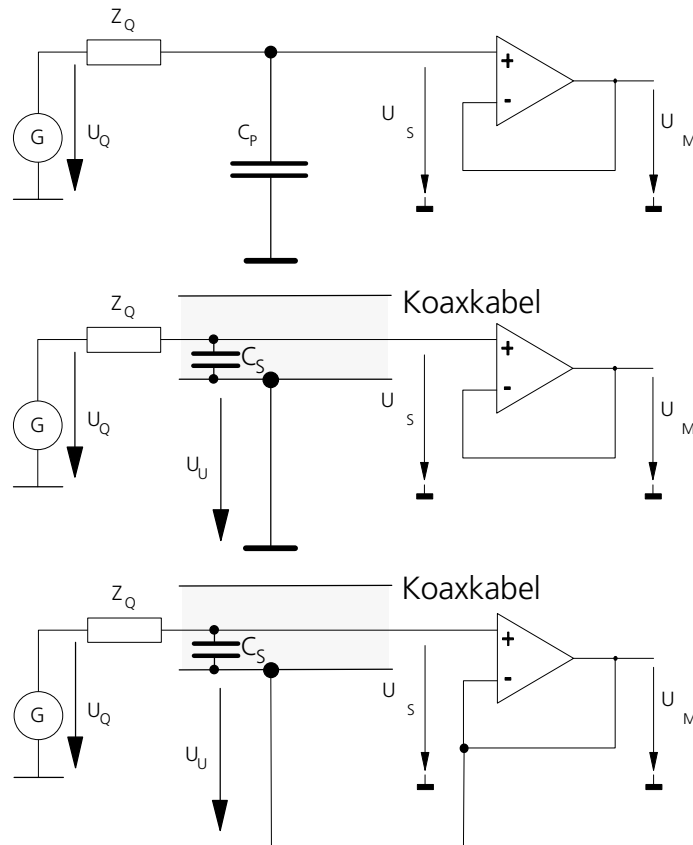


Bild 92: Schaltungsvarianten für verschiedene Schirme.
 Oben: ungeschirmt (offene Leitung).
 Mitte: geerdeter Schirm (Außenpotential = 0V)
 Unten: aktiver Schirm (Potentialnachführung)

In manchen Anwendungsfällen wird um die Koaxialleitung noch ein weiterer koaxialer Leiter angebracht, der dann üblich geerdet wird. Dies stellt einen Schirm dar, der die Störung benachbarter Leitungen durch den aktiven Schirm mit seiner niederohmigen Quelle (OpV-Ausgang) mindert.

2.4.1.5 Umkehrverstärkerschaltung, Summierer

Bei der Elektrometerschaltung haben wir die Spannungsgegenkopplung kennengelernt. Eine andere Möglichkeit eine definierte Verstärkung einzustellen ist die Stromgegenkopplung.

Legen wir zunächst den P-Eingang des Verstärkers auf Masse (GND) (Bild 93 links). Aufgrund der hohen Leerlaufverstärkung des OpV und der endlichen Ausgangsspannung darf die Differenzeingangsspannung U_D als sehr klein, idealerweise Null, angenommen werden. Damit stellt sich am N-Eingang ebenfalls das Potential Null (GND) - zumindest näherungsweise - ein und wir nennen das Potential am N-Eingang "fiktive Masse".

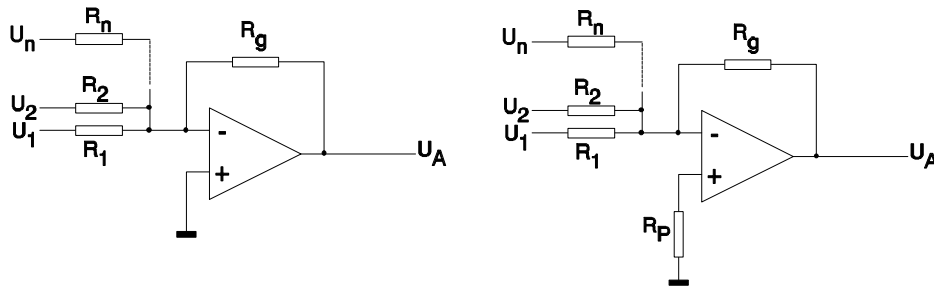


Bild 93: Operationsverstärker in Umkehrsummiererschaltung (invertierender Summierer); links ohne, rechts mit Kompensationswiderstand.

Damit sich die fiktive Masse einstellen kann, verbinden wir den Ausgang des OpVs mit dem N-Eingang über einen Widerstand R_g . Wenn sich - aus welchen Gründen sei noch offen - am N-Eingang ein Potential U_N einstellen sollte, dann stellt sich nach Gl.(240) eine Differenzspannung $U_D = -U_N$ ein, die zu einer Ausgangsspannung $U_A = V U_D$ führt. Da in den N-Eingang aufgrund der hohen Eingangsimpedanz kein Strom fließt, gilt durch die Beschaltung mit R_g stets $U_N = U_A$ und damit $U_D = -U_N = U_A/V$. Mit V gegen unendlich ergibt sich dann $U_D = 0$.

Durch hinzufügen weiterer Widerstände $R_1 \dots R_n$ auf den Eingang können wir für den N-Eingang die Kirchhoffsche Knotenregel ansetzen und erhalten

$$\sum I = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + \dots + I_n + I_g = 0. \tag{259}$$

Der Strom in der N-Eingang haben wir hier wieder vernachlässigt. Die Ströme durch die Widerstände ergeben sich aus den Spannungen über den Widerständen, wobei ein Anschluß jeweils auf fiktivem Massepotential liegt:

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots + \frac{U_n}{R_n} + \frac{U_A}{R_g} = 0 \tag{260}$$

Nach geeigneter Umformung ergibt sich dann für die Ausgangsspannung

$$U_A = -\frac{R_g}{R_1} U_1 - \frac{R_g}{R_2} U_2 - \dots - \frac{R_g}{R_n} U_n. \tag{261}$$

Sie ist somit abhängig von der Summe der Eingangsspannungen, gewichtet mit den Faktoren der Widerstandsverhältnisse aus Gegenkopplungs- und Eingangswiderstand. Ist nur ein Eingangswiderstand vorhanden, also $n=1$, dann ergibt sich mit

$$\frac{U_A}{U_1} = -\frac{R_g}{R_1} = -V_{IG} \tag{262}$$

die Übertragung eines invertierenden Verstärkers mit dem Verstärkungsfaktor V_{IG} . Diese Schaltung besitzt für den Eingang k den Eingangswiderstand R_k . Der Ausgangswiderstand entspricht ca. dem Ausgangswiderstand des Verstärkers. R_g sollte nicht zu klein gewählt werden, da sonst durch die Stromgegenkopplung bereits eine deutliche Belastung des OpV-Ausgangs erfolgt. Die Ströme für die Eingangskreise sollten nicht zu klein sein, d.h. die Eingangswiderstände nicht zu hochohmig, da sonst bei realen OpV die Vernachlässigung des Stroms in den N-Eingang nicht mehr zulässig ist (Gl.(259)).

Betrachten wir die Wirkung der Eingangsströme, insbesondere der statischen Eingangsströme, also der sog. Eingangsruhestrome, genauer. Insbesondere bei Operationsverstärkern mit bipolaren Eingangsstufen sind die Eingangsströme oftmals nicht zu vernachlässigen. Nach Gl.(241) ist ein Eingangsruhestrom erforderlich, um die Ausgangsspannung auf Null einzustellen. Bei unserer invertierenden Schaltung nach Bild 93 links bedeutet dies, daß der Eingangsruhestrom des N-Eingangs I_{IN} (vgl. Bild 87) durch die Parallelschaltung aller am N-Eingang liegenden ohmschen Widerstände fließen muß. Die Folge ist eine Potentialverschiebung der Eingangsspannung am N-Eingang U_{IN} um

$$\Delta U_{IN} = I_{IN} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (263)$$

und damit ein verschieben des "fiktiven Massepotentials" am N-Eingang. Dies wiederum bedeutet ein falsches Bezugspotential, was sich als Offsetspannung am Ausgang bemerkbar macht. Im Allgemeinen darf angenommen werden, daß die Eingangsruhestrome am N- und P-Eingang aufgrund der Symmetrie in etwa gleich groß sind. Damit können wir mittels eines Kompensationswiderstandes (Bild 93 rechts)

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (264)$$

die gleiche Potentialverschiebung am P-Eingang bewirken und damit als Differenz beseitigen (kompensieren), also auch den Offsetfehler am Ausgang beseitigen.

2.4.1.6 Subtrahierer

Die Differenzbildungseigenschaft des Operationsverstärkers läßt sich auch bei externer Beschaltung nutzen, d.h. es ist das Ziel, eine Differenzspannung definiert zu verstärken. Dies können wir dadurch erreichen, daß wir das Referenzpotential (fiktive Masse) des Summierers in die Spannungsmessung mit einbinden. Realisierbar ist dies mit der allgemeinen Schaltung nach Bild 94.

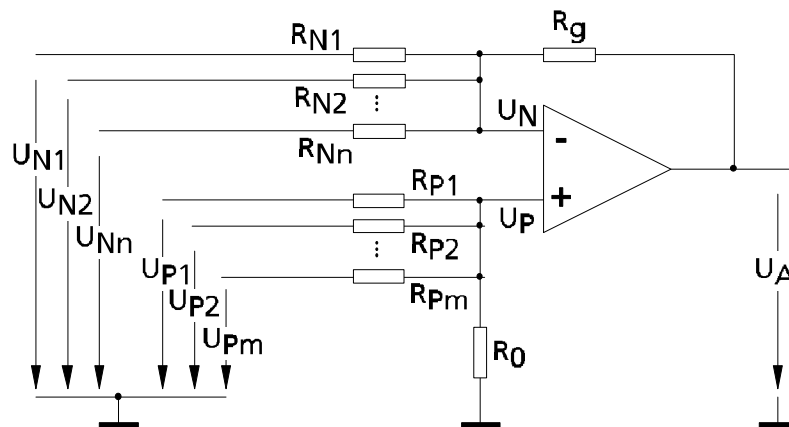


Bild 94: Operationsverstärker in Subtrahierschaltung

Definieren wir Randbedingungen für die Beschaltungswiderstände und definieren hierzu die Bezugswiderstände

$$\text{Randbedingung 1: } R_g = R_N \quad (265)$$

und

$$\text{Randbedingung 2: } R_0 = R_p. \quad (266)$$

Analog zum Inverter (Gl.(259)) können wir für den N-Eingang die Knotenregel ansetzen, müssen dabei aber beachten, daß U_N jetzt nicht mehr der fiktiven Masse entspricht, sondern ein beliebiges Potential aufweisen kann:

$$\sum_{i=1}^n I_i + \frac{U_A - U_N}{R_g} = 0. \quad (267)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{U_{Ni} - U_N}{R_{Ni}} + \frac{U_A - U_N}{R_g} = 0 \quad (268)$$

Gehen wir davon aus, daß die R_{Ni} über Faktoren α_i mit R_N bzw. R_g verknüpft sind, dann gilt mit Gl.(265)

$$\sum_{i=1}^n \frac{U_{Ni} - U_N}{\frac{R_N}{\alpha_i}} + \frac{U_A - U_N}{R_N} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n [\alpha_i (U_{Ni} - U_N)] + U_A - U_N = 0 \quad (269)$$

und nach dem Ausmultiplizieren

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i U_{Ni} - U_N \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i + 1 \right] + U_A = 0. \quad (270)$$

Für den P-Eingang ergibt sich, wieder mit vernachlässigtem Eingangsstrom in den P-Eingang, aus der Knotenregel

$$\sum_{i=1}^m I_i + \frac{U_P}{R_0} = 0 \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=1}^m I_i = \sum_{i=1}^m \frac{U_{Pi} - U_P}{R_{Pi}}. \quad (271)$$

Wir beziehen hier wieder die Widerstände des P-Eingangs auf den Referenzwiderstand, hier R_p und drücken das Verhältnis mit dem Faktor β_i aus. Mit Gl.(266) erhalten wir dann analog zum N-Eingang aus Gl.(271)

$$R_{Pi} = \frac{R_p}{\beta_i} = \frac{R_0}{\beta_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \beta_i U_{Pi} - U_P \left[\sum_{i=1}^m \beta_i + 1 \right] = 0. \quad (272)$$

Beim idealen Operationsverstärker dürfen wir wieder aufgrund der endlichen Ausgangsspannung unter "unendlich" hohen Verstärkung $U_D = U_P - U_N = 0$ annehmen. Setzen wir Gl.(270) und Gl.(272) einander gleich, dann erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i U_{Ni} - U_N \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i + 1 \right] + U_A - \sum_{i=1}^m \beta_i U_{Pi} + U_P \left[\sum_{i=1}^m \beta_i + 1 \right] = 0. \quad (273)$$

Führen wir hier eine dritte Randbedingung

$$\text{Randbedingung 3: } \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \quad (274)$$

ein, dann ergibt sich aus Gl.(273) nach einigen Umformungen für die Ausgangsspannung

$$U_A = \sum_{i=1}^m \beta_i U_{Pi} - \sum_{i=1}^n a_i U_{Ni} \tag{275}$$

mit den drei o.a. Randbedingungen.

Für den Sonderfall $m=n=1$ und $\alpha=\beta=V$ erhalten wir den einfachen Differenzverstärker

$$U_A = V \cdot (U_{P1} - U_{N1}). \tag{276}$$

Diese Verstärker sind geeignet, um die häufige Anwendung der Verstärkung von Differenzspannungen zu übernehmen. Ein typisches Anwendungsbeispiel ist der Abgriff einer Brückendiagonalspannung. Allerdings belasten, wie bei der Umkehrsummiererschaltung, die Eingangswiderstände die Signalquelle, was häufig unerwünscht ist. Insbesondere wenn ein hohes V (Gl.(276)) realisiert werden muß, bedeutet dies, daß die Eingangswiderstände relativ niederohmig zu wählen sind. Für die Wahl aller Widerstände sind die Vernachlässigungen der Eingangsströme in den P-, bzw. N-Eingang zu berücksichtigen (vgl. Hinweis bei Umkehrsummiererschaltung).

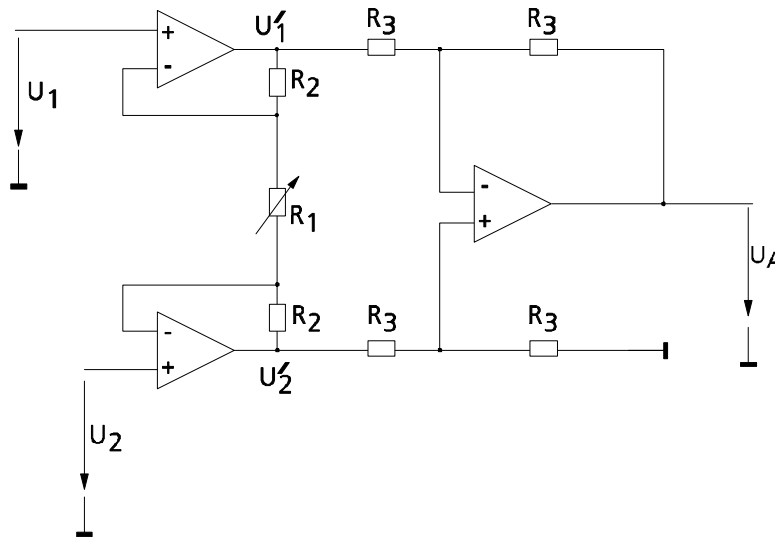


Bild 95: Operationsverstärker als Subtrahierer (Differenzverstärker) mit Elektrometereingangverstärkern

Um hohe Eingangswiderstände mit der Möglichkeit der Differenzverstärkung kombinieren zu können, lassen sich den Eingängen des Differenzverstärkers Impedanzwandler vorschalten. Vorteilhaft wird hier auch bereits die Verstärkung vorgenommen. Der Subtrahierer bildet dann nur noch die Differenz, d.h. in Gl.(276) ist $V=1$.

Für eine saubere Differenzverstärkung muß dann allerdings eine gleich große Verstärkung des Plus- (U_2) und Minuseinganges (U_1) gewährleistet sein. Beim Elektrometerverstärker ist die Verstärkung über das Widerstandsverhältnis des Teilers (Gl.(257)) maßgebend, so daß zwei gekoppelte (!) Potentiometer erforderlich wären, um die Verstärkung einzustellen.

Diesen Nachteil können wir mit der Schaltung nach Bild 95 beseitigen, bei der die beiden Teiler kombiniert sind. Für die Elektrometereingänge gilt wieder $U_D=0$, so daß sich über dem Potentiometerwiderstand R_1 der Spannungsabfall U_2-U_1 einstellt. Bezeichnen wir den Strom durch R_1 mit I_Q

$$I_Q = \frac{U_2 - U_1}{R_1}, \tag{277}$$

der auch, wegen der vernachlässigten OpV-Eingangsströme, durch die Teiler fließen muß. So gilt für die Differenzausgangsspannung der Elektrometerverstärker

$$U'_2 - U'_1 = I_Q \cdot (R_2 + R_1 + R_2). \quad (278)$$

Setzen wir Gl.(277) ein und formen geeignet um, dann ergibt sich zusammen mit dem symmetrisch beschalteten (R_3) Subtrahierer

$$U_A = U'_2 - U'_1 = [U_2 - U_1] \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{R_2}{R_1}\right], \quad (279)$$

bei der die Spannungsverstärkung über R_1 symmetrisch eingestellt werden kann.

Diese Schaltung wird auch Instrumentenverstärker oder symmetrischer Subtrahierverstärker genannt und ist besonders zum hochohmigen Abgriff in Meßbrücken geeignet.

2.4.1.7 Integrierer und Mittelwertbilder

Der Umkehrverstärker (Bild 93) läßt sich auch mit anderen Impedanzen beschalten, so daß Gl.(261), bzw. Gl.(262) sich auch mit allgemeinen Wechselstromwiderständen ausdrücken läßt. Allgemein erhalten wir dann durch die Beschaltung eine Frequenzabhängigkeit, mithin also eine Filterschaltung.

So ergibt sich z.B. durch Gegenkopplung mit einer Kapazität C (Bild 96) für die komplexe Ausgangsspannung

$$U_A = -X_C \cdot \left[\frac{1}{R_1}U_1 + \dots + \frac{1}{R_n}U_n\right] = -\frac{1}{j\omega C} \cdot \left[\frac{1}{R_1}U_1 + \dots + \frac{1}{R_n}U_n\right]. \quad (280)$$

Diese Relation beschreibt ein Integrationsverhalten (vgl. auch Laplacetransformation).

Ein anderer Weg zur Beschreibung dieser Schaltung führt wieder über die Kirchhoffsche Knotenregel mit dem Ansatz nach Gl.(259). Der Strom aus der Gegenkopplung wird jetzt nicht mehr über die Ausgangsspannung direkt, sondern über deren Ableitung bestimmt, da der Kondensatorstrom i_g differentiell mit der Kondensatorspannung verknüpft ist:

$$i_g(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d(u_A(t) - u_N(t))}{dt} = C \cdot \frac{du_A}{dt}. \quad (281)$$

Lösen wir mit diesem i_g Gl.(259) nach der Ausgangsspannung $u_A(t)$ auf, dann ergibt sich

$$\frac{du_A}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \left[\frac{1}{R_1}u_1(t) + \dots + \frac{1}{R_n}u_n(t)\right], \quad (282)$$

bzw. nach beidseitiger Integration innerhalb der Integrationsgrenzen $0..t$:

$$u_A(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t \left[\frac{1}{R_1}u_1(\tau) + \frac{1}{R_2}u_2(\tau) + \dots + \frac{1}{R_n}u_n(\tau)\right] d\tau + \underbrace{u_A(t=0)}_{U_0}. \quad (283)$$

Es stellt sich also eine zeitliche Integration über die Summe der Eingangsspannungen ein. Hierbei ist U_0 die Ladespannung des Kondensators, also die Ausgangsspannung, zum Zeitpunkt $t=0$.

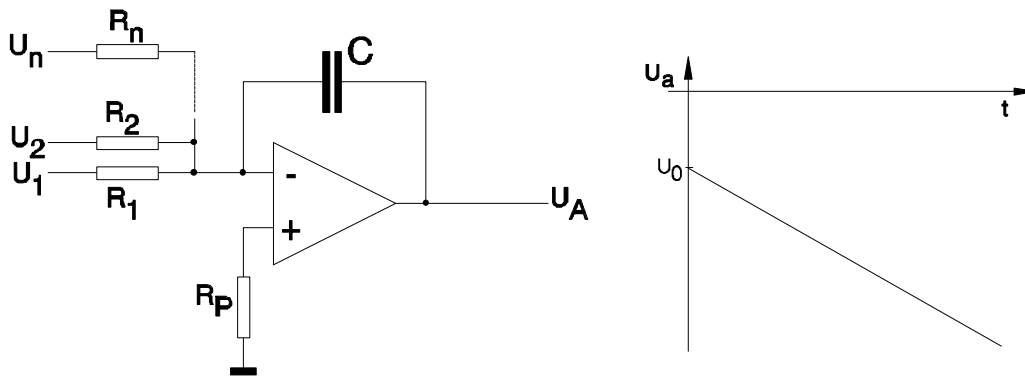


Bild 96: Operationsverstärker als Integriert (Integrierer) in invertierenden Schaltung; links: Schaltung, rechts: Sprungantwort

Bild 96 rechts zeigt die Sprungantwort des Integrierers (Sonderfall $n=1$, also nur eine Eingangsspannung). Wir sehen die Anfangsspannung U_0 und dann die Integration - mit negativem Vorzeichen - des konstanten Eingangssprunges. Der Kompensationswiderstand R_p bestimmt sich hier auch wieder aus der Parallelschaltung der ohmschen Widerstände am N-Eingang.

Neben der invertierenden Schaltung lassen sich auch nicht-invertierende Integrierer aufbauen. Eine Schaltungsvariante zeigt Bild 97 [36].

Mitunter ist eine zeitliche Mittelung statt einer Integration gefordert, sozusagen eine "elektronische Trägheit". Wir sprechen dann von einer gleitenden Mittelung. Betrachten wir uns noch einmal den Mittelwert eines Signals (Gl.(162)). Jedes Signal können wir in seinen Mittelwert \bar{u} und den mittelwertfreien Rest $u_w(t)$ zerlegen, der damit nur noch aus Wechselanteilen besteht:

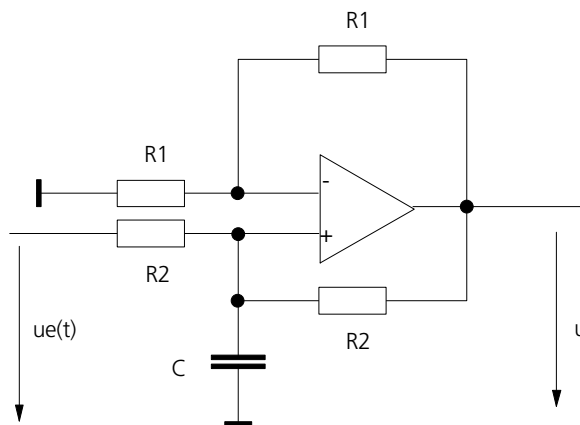


Bild 97: Nicht-invertierende Integriererschaltung

$$u(t) = \bar{u} + \underbrace{u_w(t)}_{u(t) - \bar{u}} \tag{284}$$

Lassen wir auch eine langsame zeitliche Änderung des Mittelwertes zu, dann gibt es eine Frequenz f_w des Signalanteils, die die Zuordnung der Wechselanteile zum Mittelwert oder zum Wechselanteil trennt. Diese bestimmt praktisch die Trägheit.

Aus unserem Ansatz über die frequenzabhängigen Impedanzen (Gl.(280)) können wir uns jetzt eine Beschaltung überlegen, die für Frequenzen unterhalb f_w das Signal einfach verstärkt und für Frequenzen oberhalb f_w unterdrückt, bzw. zeitlich ausmittelt.

Wählen wir eine Beschaltung nach Bild 98 mit dem Sonderfall $n=1$, also nur eine Eingangsgröße $u_1(t)=u_e(t)$ und einem Eingangswiderstand $R_1=R_e$ (sog. VZ-1-Glied oder Tiefpaß 1. Ordnung), dann ergibt sich aus Gl.(262) analog zu Gl.(280) der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{U_A(j\omega)}{U_e(j\omega)} = - \frac{Z_g}{Z_e} \tag{285}$$

Für die Eingangs- und Gegenkopplungsimpedanzen ergeben sich

$$Z_e = R_e \tag{286}$$

$$Z_g = \frac{1}{\frac{1}{R_g} + j\omega C} = \frac{R_g}{1 + j\omega R_g C} \tag{287}$$

Eingesetzt in Gl.(285) ergibt sich

$$G(j\omega) = - \frac{R_g}{R_e + j\omega R_e R_g C} = - \frac{R_g}{R_e} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_g C} \tag{288}$$

Führen wir die Grenzbetrachtungen

$$G(j\omega) \rightarrow \begin{cases} - \frac{R_g}{R_e} & \text{für } \omega \ll \frac{1}{R_g C} \\ - \frac{1}{j\omega R_e C} & \text{für } \omega \gg \frac{1}{R_g C} \end{cases} \tag{289}$$

durch, dann ergibt sich für kleine Frequenzen ($f \ll f_w$) das Verhalten eines Verstärkers und bei großen Frequenzen ($f \gg f_w$) das Verhalten eines Integrierers. Dies entspricht o.a. Forderung für die "gleitende" Mittelwertbildung.

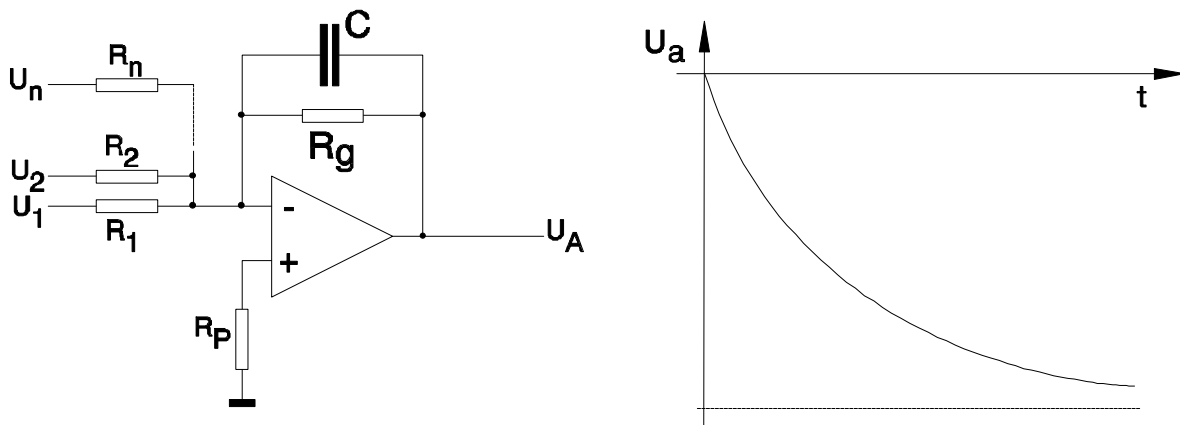


Bild 98: Operationsverstärker als Mittelwertbilder (VZ-1-Glied) in invertierender Schaltung; links: Schaltung; rechts: Sprungantwort

Die Trägheit des VZ-1-Gliedes (Übertragungsglied mit Verzögerung erster Ordnung) ist auch aus der Sprungantwort (Bild 98 rechts) ersichtlich. Das Ausgangssignal reagiert verzögert auf den Eingangssprung. Für den Kompensationswiderstand gilt die selbe Regelung wie beim Umkehrsummierer (Gl.(264)).

2.4.2 Oszillatoren und Funktionsgeneratoren

Lernziel: Signalerzeugung, Spreisung von Wechselspannungssystemen, Funktionsgeneratoren

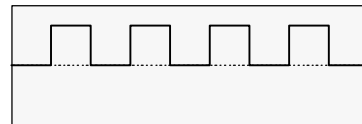
2.4.2.1 Anwendungen

In der Meßtechnik werden für viele Aufgaben Oszillatoren für sinusförmige und nicht sinusförmige, aber periodische Wechselspannungen benötigt. Sie dienen u.a.

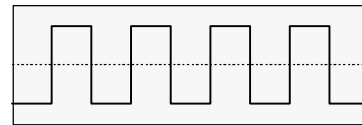
- der Speisung von Wechselspannungsgebern, z.B. Differentialtransformatoren, induktiven Gebern, etc.
- der Speisung von Wechselstrombrücken
- der Frequenzumsetzung (Mischer)
- der Takterzeugung
- als Funktionsgenerator, usf.

Es gibt verschiedene Verfahren der Schwingungserzeugung. Wir unterscheiden grundsätzlich Sinusoszillatoren und solche für andere Signalformen (Bild 99).

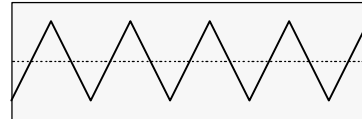
Rechteckpuls 0..max (z.B. Digitalsignale, TTL etc.)



Symmetrische Rechteckschwingung von $U = -\text{max}.. \text{max}$



Symmetrische Dreieckschwingung von $U = -\text{max}.. \text{max}$



Symmetrische Sinusschwingung von $U = -\text{max}.. \text{max}$

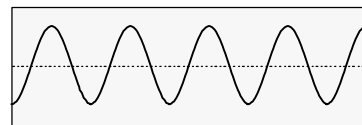


Bild 99: Einige Signalformen von Signalgeneratoren für die Meßtechnik

2.4.2.2 Sinusoszillatoren

Gegenüber den Oszillatoren für Rechteck- und Sägezahnschwingungen ist bei Sinusoszillatoren das Verfahren der Rückkopplung sehr verbreitet. Neben diesem Verfahren lassen sich aber auch Sinusoszillatoren über Umsetzung aus Rechteckschwingungen (Parabelbogensatz durch zweimalige Integration) oder über formgebende, aktive oder passive Netzwerke näherungsweise erzeugen. Auch ist die Erzeugung über DA-Wandler mit entsprechender Ansteuerung als Näherung möglich.

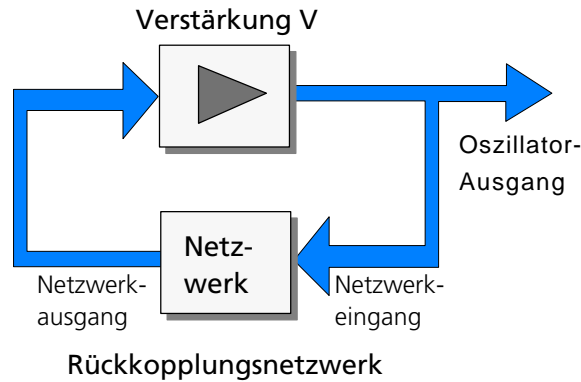


Bild 100: Grundprinzip eines rückgekoppelten Oszillators für Sinusschwingungen

Hier werden Sinusoszillatoren mit rückgekoppelten Verstärkern vorgestellt (Bild 100). Ein lineares Rückkopplungsnetzwerk reagiert am Ausgang bei harmonischer, d.h. sinusförmiger, Erregung am Eingang mit mit einer ebenfalls sinusförmigen Spannung, die aber in Amplitude und Phase vom erregenden Signal abweicht. Wie groß diese Abweichungen sind beschreibt, abhängig von der Frequenz, der sog. Frequenzgang des Netzwerkes. Die linearen Netzwerke sind mittels R-L-C-Schaltungen aufgebaut und können mittels der Wechselstromlehre und den einschlägigen Netzwerkregeln (Kirchhoff, Ohm) analysiert werden.

Betrachten wir die Struktur nach Bild 100 etwas näher, schneiden aber gedanklich die Rückkopplung z.B. am Verstärkerausgang auf und speisen dafür mit einer bekannten Wechselspannungsquelle eine Wechselspannung in das Netzwerk ein.

Betrachten wir dabei den Verstärkerausgang, dann können wir, sicherlich abhängig von der Frequenz, mehrere Fälle nach Bild 101 unterscheiden:

1. Allgemeiner Fall: die Wechselspannung am Ausgang des Verstärkers ist in Betrag und Phase bezüglich der Speisung unterschiedlich.
2. Sonderfall Gleichphasigkeit: Die Phasendrehung des Netzwerkes einschließlich des Verstärkers ist gleichphasig. Das Amplitudenverhältnis von Eingangs- und Ausgangssignal kann <1 , $=1$ oder >1 sein.

Wenn sich eine Frequenz findet, bei der Gleichphasigkeit eintritt und gleichzeitig das Amplitudenverhältnis exakt 1 ist, dann sind das Ausgangssignal des Verstärkers und das künstliche Speisesignal dem Verlauf nach identisch. In diesem Fall könnte, da die Potentiale gleich sind, der Verstärkerausgang die Speisequelle ersetzen, d.h. die Schleife geschlossen werden, und es würde sich eine bleibende Schwingung konstanter Frequenz und Amplitude einstellen.

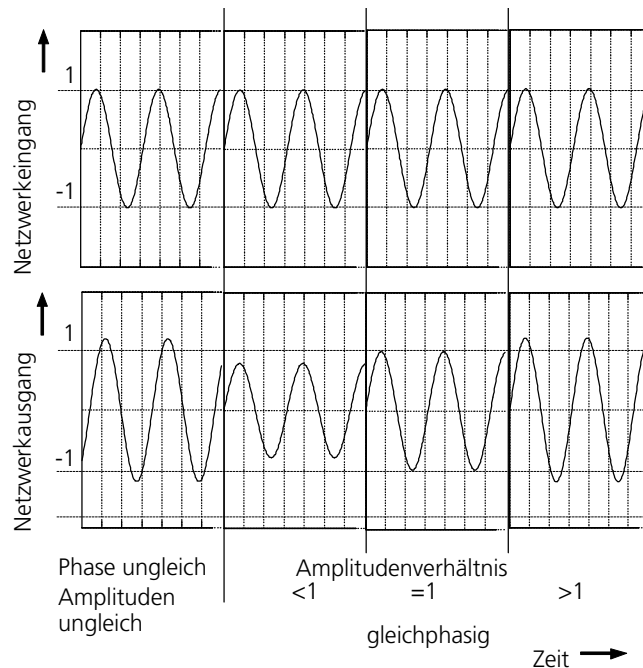


Bild 101:: Phasenlagen von Rückkopplungsnetzwerken

Vereinfacht können wir feststellen, daß bei einem Amplitudenverhältnis < 1 bei jeder Schwingung am Eingang am Ausgang "zu wenig ankommt" um über die Rückkopplung die Schwingung aufrecht zu erhalten. Dies bedeutet, die Schwingamplitude klingt ab. Demgegenüber ist bei einem Amplitudenverhältnis > 1 ein aufklingen der Amplitude zu beobachten.

Setzen wir idealisierte Verstärker voraus, z.B. Operationsverstärker, dann lassen sich hauptsächlich zwei Typen umsetzen:

- Elektrometerverstärker mit einem Verstärkungsfaktor > 0 (> 1)
- Inverter mit einem Verstärkungsfaktor < 0 , d.h. Phasendrehung -180° .

D.h. je nach Verstärker können als Phasendrehungen der Netzwerke nur 0° , bzw. -360° , oder -180° auftreten. Mit Hilfe der Systemtheorie (Regelungstechnik) läßt sich die Rückkopplungsbedingung schärfer fassen (Stichwort: Nyquistkriterium). Vereinfacht gilt für die unterbrochene Rückführung die Bedingung für eine Dauerschwingung im geschlossenen Fall:

- Phasendrehung von Netzwerk und Verstärker 0° oder -360° für eine definierte Frequenz (=Schwingfrequenz) und
- Schleifenverstärkung⁴=1 bei
- gleichzeitigem Tiefpaßcharakter.

⁴ Als Schleifenverstärkung wird die Verstärkung eines rückgekoppelten Systems bei aufgetrennter Schleife (Rückkopplung) verstanden, wobei an der Trennstelle entsprechend eingespeist bzw. abgegriffen wird.

2.4.2.3 Schaltungsvarianten für Sinusoszillatoren

RC-Oszillator mit Tiefpaßnetzwerk

Passive Netzwerke mit Tiefpaßcharakter n -ter Ordnung drehen die Phase i.d.R. von 0° bei kleinen Frequenzen auf $n \cdot (-90^\circ)$ bei hohen Frequenzen. Da sich 0° Phasendrehung theoretisch nur für $f=0\text{Hz}$ erreichen läßt, scheidet der 0° -Ansatz aus. Für -180° sind mindestens 3 Tiefpässe 1. Ordnung erforderlich, da sich -180° bei einem Tiefpaß von nur 2. Ordnung wiederum theoretisch nur bei unendlich hoher Frequenz einstellt.

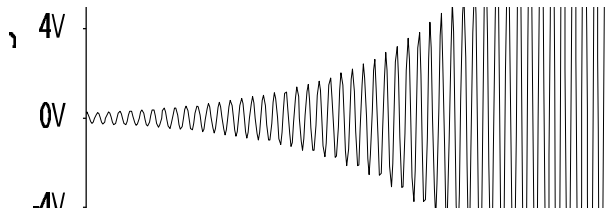


Bild 102: Ein Tiefpaß zur Phasendrehung von mehr als -180° mit drei RC-Kombinationen

Bild 102 zeigt einen RC-Tiefpaß 3. Ordnung. Zu beachten ist hierbei, daß die einzelnen Stufen nicht "entkoppelt" sind, d.h. die nachfolgende Stufe belastet die vorhergehende. R_a stellt z.B. den Eingangswiderstand des nachfolgenden, in Bild 102 nicht dargestellten Verstärkers dar, der den Tiefpaß an der letzten Stufe belastet.

Der Verstärker muß die Dämpfung des Tiefpasses bei der Frequenz mit -180° Phasendrehung (d.h. der Schwingfrequenz) mit seinem Verstärkungsfaktor ausgleichen und gleichzeitig die Phasenlage auf -360° ergänzen.

Die Schleifenverstärkung wird in der Praxis etwas größer als Eins gewählt, so daß sich bereits bei kleinsten Störungen (Rauschen, Anfangsspannungen, z.B. in den Kapazitäten, Einkopplungen,..) eine aufklingende Schwingung ergibt. Dieses Anschwingen des Oszillators endet in der Praxis bei der Aussteuerungsgrenze des Verstärkers. Bei zu großer Schleifenverstärkung stellen sich Verzerrungen in der Schwingung ein (Stichwort: Klirrfaktor).

RC-Oszillator nach Wien

Ein Netzwerk mit 0° Phasendrehung, und dementsprechend mit einem Elektrometerverstärker zum Oszillator ergänzt, zeigt Bild 103 [46]. Der Schaltungsaufwand ist geringer als bei der Schaltung basierend auf Bild 102. Auch sind die erforderlichen Verstärkungen geringer.

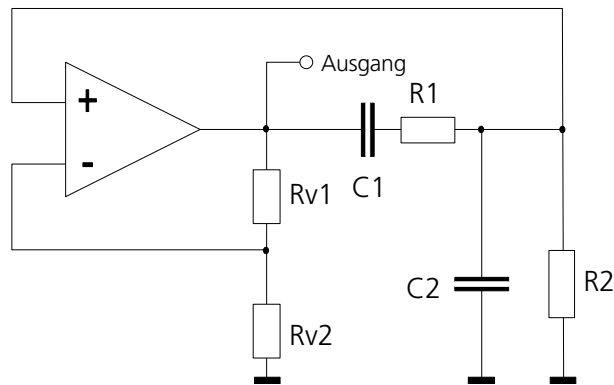


Bild 103: RC-Oszillator nach Wien

Diese Schaltung wird auch als Brückenoszillator bezeichnet, da die Operationsverstärkereingänge (p,n) quasi die Brückendiagonalspannung unmittelbar abgreifen. Die Brücke wird dabei im linken Zweig durch R_{v1} und R_{v2} , und im rechten Zweig durch die RC-Kombinationen gebildet. Die Differenzspannung am Verstärkereingang verschwindet nur dann, wenn die Brücke abgestimmt ist (Phasen- und Betragsbedingung!).

Wiederum ergibt sich das Anschwingen bei etwas zu groß gewählter Schleifenverstärkung und die Amplitudenbegrenzung erfolgt über die begrenzte Kennlinie des Verstärkers.

Neben den RC-Oszillatoren spielen in der Meßtechnik LC-Oszillatoren eine große Rolle. So sind induktive Geber oder Differentialtransformatoren für Weg- oder Druckmessungen häufig verbreitet. Da diese Induktivitäten gespeist werden müssen, liegt es nahe, daß diese direkt in den Oszillator mit eingebunden werden. Eine Möglichkeit der Einbindung zeigt Bild 104 [36]. In diese Schaltung läßt sich auch ein Schwingquarz integrieren, um die Frequenz quarzgenau zu stabilisieren.

Neben den hier beschriebenen Schaltungsvarianten gibt es noch zahlreiche andere Lösungen. Vorschläge hierfür finden sich z.B. in [36] und [46].

LC-Oszillator nach Colpitts

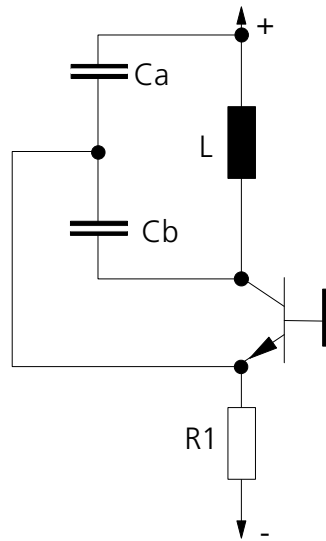


Bild 104: LC-Oszillator nach Colpitts in Basisschaltung mit Bipolartransistor [36].

2.4.2.4 Funktionsgeneratoren

Funktionsgeneratoren geben definierte Signalverläufe, i.d.R. als Spannung, ab. Meist können Sinus-, Rampen- (Dreieck-, Sägezahn-,..) und Rechteckverläufe eingestellt werden. Sie dienen als Testfunktionen für meßtechnische Untersuchung oder werden auch als Signale in elektronischen Meßgeräten benötigt. Beispielsweise als Taktsignal, Ansteuerung von Arbeitspunkten, Modulation, usw.

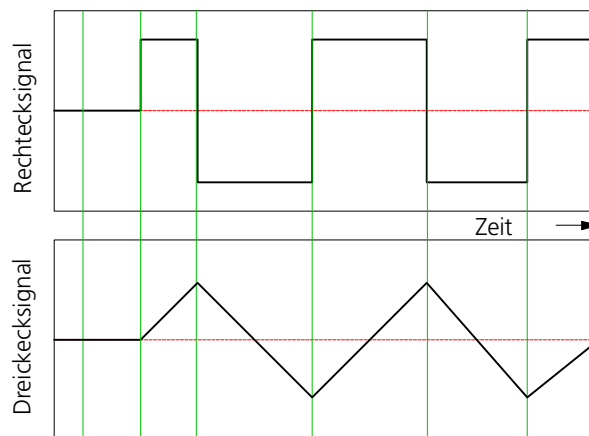


Bild 105: Rampensignal (Dreiecksignal) aus einem Rechtecksignal, gewonnen mittels Integration

Das zeitbestimmende - und damit frequenzbestimmende - Glied kann z.B. über Ladung und Entladung eines Kondensators realisiert sein. Vorzugsweise läßt sich - mit der Zielsetzung, sowohl Dreieck-, als auch Rechtecksignale zu erzeugen - das dreieckförmige Signal durch Integration eines symmetrischen, d.h. mittelwertsfreien, Rechtecksignal gewinnen (Bild 105).

Da sich die Integrierer mit hoher Linearität herstellen lassen, ist ein Dreieckssignal aus hoch linearen Geradenstücken zu erwarten. Maßgebend ist dabei aber die Konstanz der Maximal-/Minimalwerte des Rechtecksignals. Eine weitere Forderung ist die Mittelwertfreiheit. Ist sie nicht erfüllt, dann wird der Mittelwert ebenfalls integriert (lineares System!) und der Integriererausgang erreicht die Begrenzung.

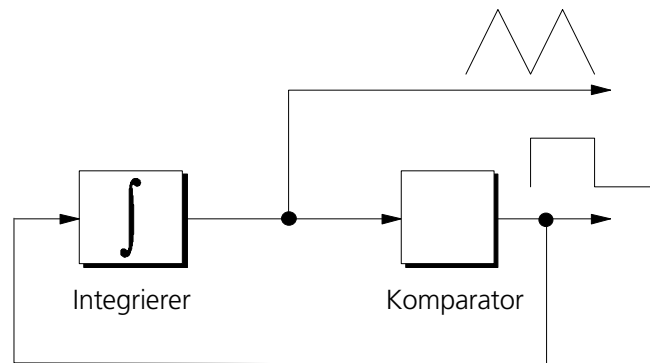


Bild 106: Dreiecksignalgenerator mit Komparator und Integrierer

Beide Forderungen lassen sich nach dem Prinzip Bild 106 erfüllen. Ein Komparator mit zunächst beliebigem Ausgangswert liefert das zu integrierende Signal. Der konstante Wert wird aufintegriert, bis der Komparator umschaltet - d.h. Vorzeichenwechsel - und damit die Integration in "die entgegengesetzte Richtung" laufen läßt, bis wiederum eine Umschaltung erfolgt. Wichtig für die Funktion ist, daß der Komparator jeweils das richtige Vorzeichen liefert, so daß sich ein periodisches Signal ergibt.

Die Ausgangspegel ergeben sich bei den vorgestellten Schaltungen durch die Begrenzung infolge endlicher Versorgung der Operationsverstärker.

2.4.2.5 Schaltungsvarianten für Funktionsgeneratoren

Dreiecksignalgeneratoren mit Integriererschaltungen

Verwenden wir die vorgestellten Komponenten zur Realisierung von Generatoren nach Bild 106, dann muß gewährleistet sein, daß eine vorzeichenberücksichtigte Rückführung erfolgt. Folgende Kombinationen können aufgebaut werden:

1. Invertierender Integrierer, nicht-invertierender Komparator (vgl. Bild 96 und Bild 107)
2. Nichtinvertierender Integrierer (Bild 97), invertierender Komparator (Bild 124)

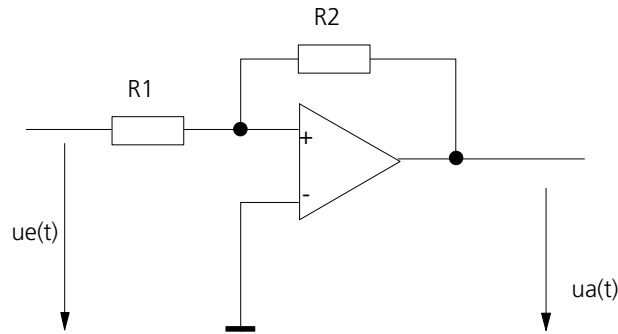


Bild 107: Einfacher nicht-invertierender Komparator mit symmetrischer, hysteresebefahnter Schaltkennlinie

Einen nicht invertierenden Komparator erhalten wird nach Bild 107. Weitere Komparatorschaltungen werden später vorgestellt (siehe Bild 124).

Parabelbogengenerator

Wird das Dreieckssignal zusätzlich integriert, dann ergeben sich aneinandergereihte Parabelbögen, die "fast" das Aussehen einer Sinusschwingung aufweisen. Es sind hier zwei Schaltungsprinzipien denkbar:

1. Ein Dreiecksgenerator nach Bild 106, wobei der Ausgang nochmals integriert wird. Dabei ergibt sich das Problem, daß geringste Mittelwertanteile - auch Offsetspannungen - im Laufe der Zeit den Integrierer zur Begrenzung hin "abdriften" lassen. Abhilfe schafft eine Schaltung, die nur näherungsweise integriert, d.h für Frequenzen \ll Frequenz der Grundschiwingung verhält sich die Schaltung wie ein Verstärker, für Frequenzen \gg Frequenz der Grundschiwingung verhält sich die Schaltung wie ein Integrierer. Realisiert wird dies durch eine VZ-1-Schaltung (Mittelwertbilder).
2. In der Rückführung wird ein zweiter Integrierer eingeschleift und dessen Ausgangssignal dem Komparator zugeführt.

Bei beiden Varianten ist zu beachten, daß die Aussteuerung der Operationsverstärker von der Frequenz des erzeugten Signals abhängt.

Multivibrator

Wird nur eine Rechteckschwingung ohne Dreieckschwingung benötigt, können der Integrierer nach Bild 97 und der Komparator zusammengezogen werden. Es genügt dann ein Tiefpaß (R_o, C), der direkt in die Komparatorschaltung einbezogen werden kann. Diese Schaltung kommt mit einem Operationsverstärker aus (Bild 108).

Der Komparator entspricht der Schaltung nach Bild 107, jedoch ist die Referenzspannung nicht mehr 0V (Masse), sondern wird durch die Ladespannung des Kondensators C festgelegt. Diese wiederum ergibt sich aus dem tiefpaßgefilterten Ausgangssignal. Der Komparatoreingang ist auf 0V gelegt.

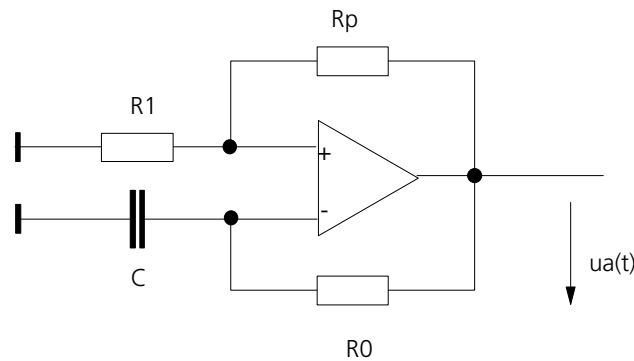


Bild 108: Multivibratorschaltung [36]

Weitere Merkmale und Realisierungen

Funktionsgeneratoren für den Laborbetrieb enthalten für die Anpassung an die Meßaufgabe weitere Möglichkeiten, deren schaltungstechnische Ausführungen hier nicht näher erörtert werden sollen. Diese Funktionsmerkmale können zum Beispiel sein:

- Amplitudeneinstellung und -stabilisierung/-regelung
- Offset, d.h. einstellbarer Mittelwert (Gleichanteil)
- Symmetrieeinstellung, d.h. bei Rechtecksignalen einstellbares Impuls-Pausen-Verhältnis und bei Dreiecksignalen unterschiedliche Flankensteilheiten
- Frequenzeinstellung mittels externer Spannung (sog. VCO: engl. Voltage Controlled Oscillator)
- Frequenzeinstellung durch "einrasten" auf ein externes Taktsignal (realisiert zum Beispiel mittels Nachlaufsynchronisation / PLL-Technik; PLL: engl. Phase Locked Loop [36])

Neben den hier vorgestellten Basisschaltungen finden sich noch zahlreiche andere Lösungen. Hier seien noch besonders die Formnetzwerke erwähnt, die aus Dreieckverläufen mit Hilfe von nichtlinearen Netzwerken - i.d.R. Dioden-Widerstandnetzwerke - andere Verläufe "formen". Eine weitere Technik stellt das zyklische Auslesen eines DigitalSpeichers (ROM) dar, der die Werte von aufeinanderfolgenden Stützstellen des gewünschten Funktionsverlaufes als Binärzahl enthält. Die Binärworte sind dann mittels eines Digital-Analog-Wandlers (Bild 125) in ein zeitkontinuierliches Signal zu wandeln.

2.4.3 Gleichrichter und Demodulatoren

Lernziel: Methoden der Präzisionsgleichrichtung, Spitzenwertgleichrichter, phasenselektive Gleichrichtung

2.4.3.1 Präzisionsgleichrichter

Wie wir bei der Wechselstrommessung bereits erörtert haben, kann es vorteilhaft sein, Wechselspannungen/-ströme gleichzurichten um sie mit einem Gleichstrommeßwerk zu messen. Wir haben dabei zwischen Einweg- und Vollweggleichrichtung (Bild 55)

unterschieden und festgestellt, daß Formfaktoren zwischen Gleichrichtmittelwert und Effektivwert zu berücksichtigen sind.

Bei den Realisierungen durch die einfachen, passiven Schaltungen (Bild 56) trat das Problem auf, daß die Schleusenspannung der verwendeten Gleichrichter, mithin die Nichtlinearität im Durchlaßbereich, sich auf das Meßergebnis auswirkt, d.h. auch dort entsprechend der Durchlaßkennlinie eine Nichtlinearität bewirkt. D.h. der Spannungsabfall über die Dioden ist abhängig vom Strom durch das Meßwerk (Bild 56).

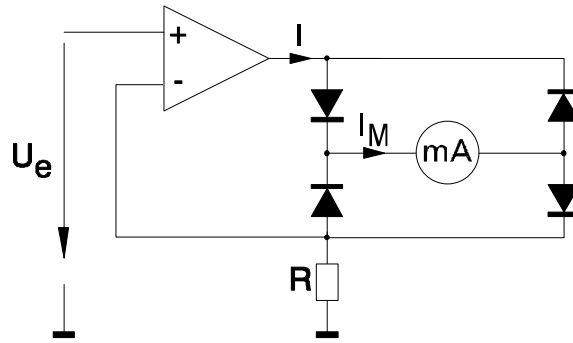


Bild 109: Beispiel eines Präzisionsgleichrichters, realisiert mit einem Operationsverstärker mit Spannungsgegenkopplung und Vollweggleichrichtung. Die Ausgangsgröße ist der Strom I durch das Meßwerk (mA).

Verwenden wir eine aktive Gleichrichterschaltung, z.B. mittels Operationsverstärker (Bild 109), dann läßt sich die Nichtlinearität der Dioden völlig aus dem Meßergebnis eliminieren. Wir erhalten dann einen sog. Präzisionsgleichrichter. Durch die Spannungsgegenkopplung gilt durch die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$\sum U = 0 \Rightarrow U_e - U_R - U_D = 0 \Rightarrow U_e = I \cdot R + U_D. \tag{290}$$

Beim als ideal angesehenen Operationsverstärker vernachlässigen wir wieder U_D , da wir eine unendlich hohe Leerlaufverstärkung annehmen. Die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers U_A treibt durch die Vollweggleichrichterschaltung den Strom I, so daß näherungsweise

$$U_A = 2 \cdot U_S + U_M + U_R = 2 \cdot U_S + U_M + I \cdot R. \tag{291}$$

gilt, wenn wir unabhängig vom Durchlaßstrom den Spannungsabfall U_S über jeder Diode annehmen. Berücksichtigen wir als Ausgangsgröße den Strom I, der vollweggleichgerichtet durch das Meßwerk fließt, dann ergibt sich aus Gl.(290)

$$I_M = |I| = \left| \frac{1}{R} \cdot U_e \right| = \frac{1}{R} |U_e|. \tag{292}$$

Über den Meßwerkwiderstand könnten wir auch die gleichgerichtete Spannung abgreifen. Die Schleusenspannung U_S , bzw. die Nichtlinearität und der Meßwerkwiderstand gehen in das Ergebnis nicht ein.

Weitere Präzisionsgleichrichterschaltungen, insbesondere solche, wo das Gleichrichtsignal als auf Masse bezogene Spannung vorliegt, finden sich in [36].

2.4.3.2 Phasenselektive Gleichrichtung

Bei vielen Anwendungen mit Wechselstromsignalen liegt die gesuchte Meßinformation nicht (nur) in der Amplitude oder dem Effektivwert, sondern auch in der Phasenlage. Diese Phaseninformation geht bei den Ein- und Vollweggleichrichtungen - auch bei Präzisionsgleichrichtung - verloren. Ein sehr häufiger Fall stellt die Wechselstrommeßbrücke dar, die nicht nur mit Wechselstromwiderständen betrieben sein muß, sondern auch mit ohmschen Widerständen betrieben werden kann. Denken wir uns in Bild 70 statt der Gleichspannungsspeisung U_0 eine Wechselspannungsquelle $u_0(t)=u_{0max}\sin(\omega t)$ mit konstanter Amplitude u_{0max} , dann stellt sich als Brückendiagonalspannung im Ausschlagverfahren ebenfalls eine Wechselspannung gleicher Frequenz, aber i.d.R. mit anderer Amplitude und Phasenlage ein. Wie aus Gl.(211) ersichtlich, kann je nach Verstimmung der Brücke die Diagonalspannung positiv oder negativ sein, was sich bei Wechselspannung in einer Phasenverschiebung von 0° oder 180° bezüglich der Speisung ausdrückt.

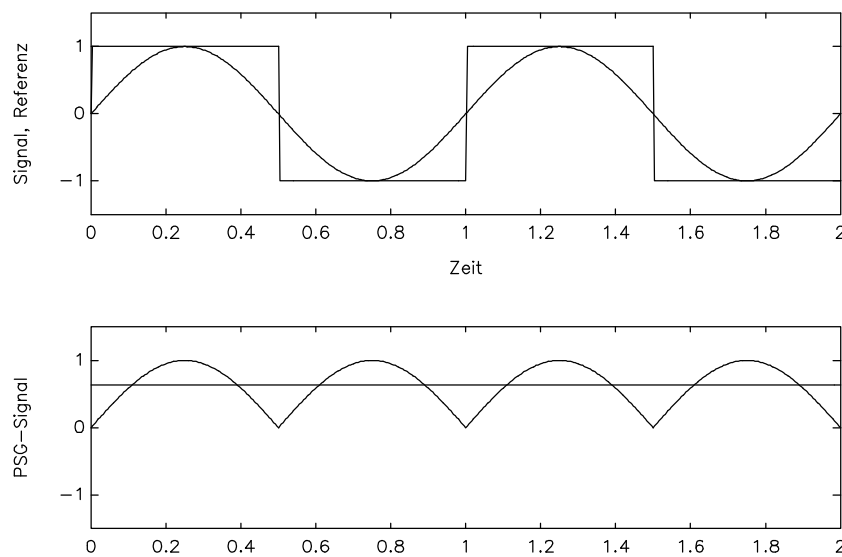


Bild 110: Verlauf des phasenselektiv gleichgerichteten Signals und dessen Mittelwertes (unten) bei Phasenlage Null zwischen einem rechteckförmigen Referenzsignal und sinusförmigem Meßsignal (oben).

Lassen wir als Brückenwiderstände beliebige Impedanzen zu, dann können sich praktisch beliebige Phasenlagen φ in der Diagonalspannung einstellen:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = u_b(t) = \hat{u}_b \cdot \sin(\omega t + \varphi). \tag{293}$$

Zur Gleichrichtung unter Berücksichtigung der Phasenlage müssen wir also das Ursprungssignal mit auswerten, d.h. wir müssen phasenselektiv gleichrichten (PSG). Da wir die Speisung als Sinus konstanter Amplitude und Phasenlage ansehen, betrachten wir nur die Phasenlage. Bild 110 zeigt einen Gleichrichtersignalverlauf, wenn Speisung und Diagonalspannung in Phase liegen. Das Referenzsignal $r(t)$ läge als Rechtecksignalverlauf

$$r(t) = \begin{cases} +1 & \forall u_0(t) \geq 0 \\ -1 & \forall u_0(t) < 0 \end{cases} \tag{294}$$

vor, der z.B. mittels eines Komperators aus dem Speisesignal gewonnen werden könnte. Werden Diagonalspannung (Signal $s(t)$) und Referenz miteinander multipliziert, dann ergibt sich das gleichgerichtete Signal s_{PSG}

$$s_{PSG}(t) = r(t) \cdot s(t) = \begin{cases} +s(t) & \forall \omega t = [0, \pi] \\ -s(t) & \forall \omega t = (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (295)$$

Beim Sinussignal nach Gl.(293) erhalten wir

$$s_{PSG} = \begin{cases} +s_{max} \sin(\omega t) & \forall \omega t = [0, \pi] \\ -s_{max} \sin(\omega t) & \forall \omega t = (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (296)$$

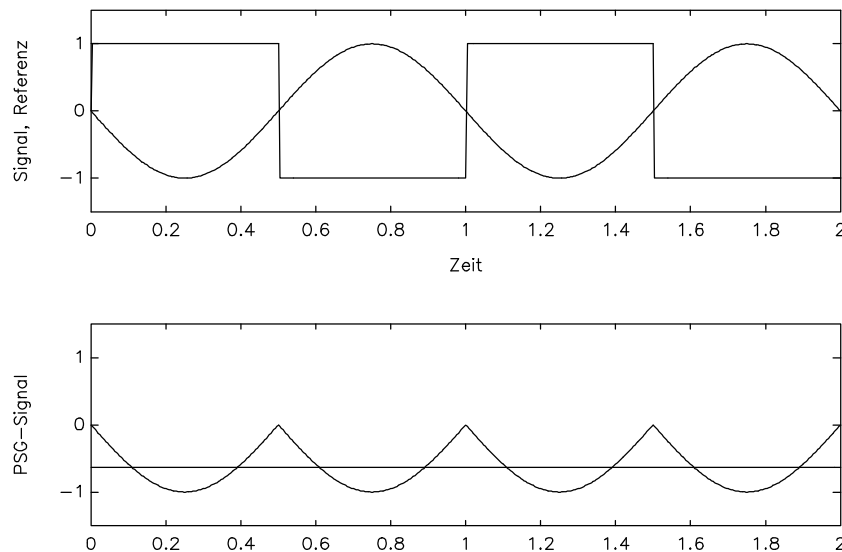


Bild 111: Verlauf des phasenselektiv gleichgerichteten Signals und dessen Mittelwertes (unten) bei Phasenlage 180° zwischen einem rechteckförmigen Referenzsignal und sinusförmigem Meßsignal (oben).

und es stellt sich für $\varphi=0$ ein Signalverlauf ähnlich der Vollweggleichrichtung ein (Bild 110 unten). Nach der Mittelung (z.B. mit Tiefpaß) ergibt sich mit Gl.(162) und Gl.(178)

$$\overline{s_{PSG}} = \frac{1}{T} \int_0^T s_{PSG} dt. \quad (297)$$

$$\overline{s_{PSG}} = \frac{1}{T} s_{max} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \varphi) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \sin(\omega t + \varphi) dt \right] = \frac{2}{\pi} s_{max} \quad (298)$$

Bei negativer Signalspannung $s(t)$ (Bild 111), d.h. $\varphi=180^\circ$, stellt sich nach Gl.(294) und Gl.(295) analog der gleiche Verlauf ein, aber das gleichgerichtete Signal erscheint negativ ("nach unten geklappt"). Der Mittelwert ist dann entsprechend auch negativ.

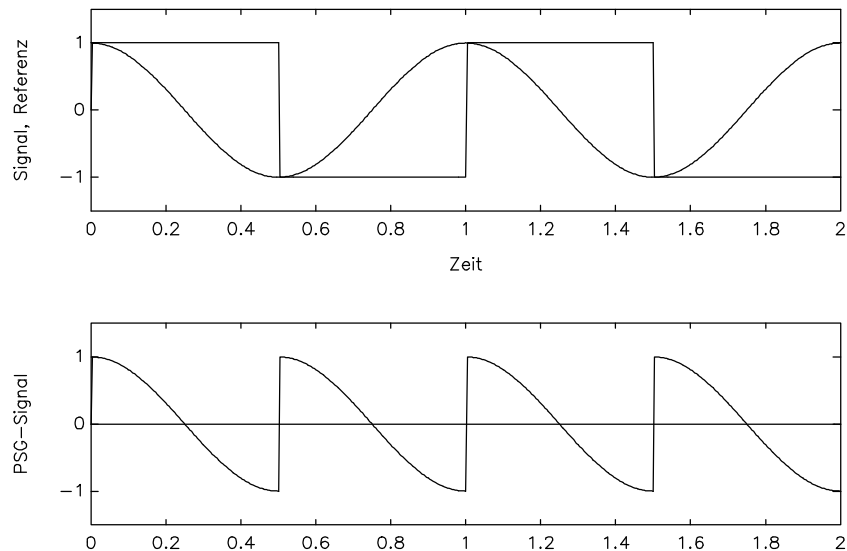


Bild 112: Verlauf des phasenselektiv gleichgerichteten Signals und dessen Mittelwertes (unten) bei Phasenlage 90° zwischen einem rechteckförmigen Referenzsignal und sinusförmigem Meßsignal (oben).

Bei Phasenlagen zwischen 0 und 180°, so z.B. bei 90° (Bild 112), ergeben sich durch die Multiplikation nach Gl.(295) entsprechende Signalverläufe, hier bei 90° mit dem Mittelwert Null. Wir können Gl.(297), bzw. Gl.(298) auch allgemein auswerten und erhalten nach erfolgter Integration für den Mittelwert des PSG-Signals

$$\overline{s_{PSG}}(\varphi, s_{max}) = \frac{2 \cdot s_{max}}{\pi} \cdot \cos(\varphi) \tag{299}$$

als abhängige Größe vom Phasenwinkel φ und der Amplitude s_{max} .

Bei der Signalauswertung nach Gl.(299) (idealer PSG) können nun, je nach Einsatzgebiet, drei Fälle unterschieden werden:

- Die quantitative Meßinformation ist in der Amplitude des Meßsignals enthalten; die Phase beinhaltet lediglich die Vorzeicheninformation. Dies ist insbesondere bei Meßbrücken mit ohmschen Widerständen im Ausschlagverfahren der Fall. Wir erhalten eine Kennlinie, aufgetragen für die zwei Vorzeichenmöglichkeiten (0°, 180°), in Abhängigkeit der Amplitude des Meßsignals nach Bild 113-rechts. Die Kennlinie ist linear und verläuft durch den Nullpunkt.

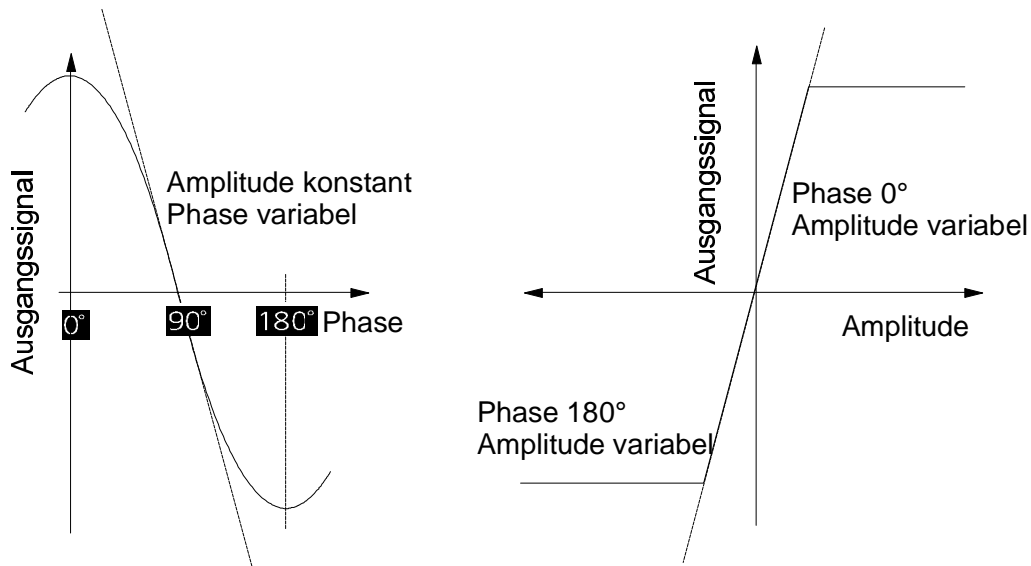


Bild 113: Kennlinien der phasenselektiven Gleichrichtung. Links: Meßinformation liegt in der Phasenlage, die Amplitude des Meßsignals ist konstant. Rechts: Meßinformation liegt in der Amplitude und Vorzeichen, die Phase nimmt nur 0° oder 180° an.

- Die quantitative Meßinformation ist in der Phasenlage enthalten, die Amplitude sei quasi konstant. Dies ist bei realen PSG mit Wechselstrombrücken, die sich über die Impedanzen nur angenähert abgleichen lassen, häufig der Fall. Wir erhalten die Kennlinie nach Bild 113-links (siehe Gl.(299))
- Außer diesen beiden Fällen kommen in der Praxis auch Mischformen beider Fälle vor. I.d.R. werden die Kennlinien von z.B. Meßbrücke und PSG zusammen durch Messung bestimmt.

Die technische Realisierung der Rechenvorschrift nach Gl.(295) läßt sich z.B. durch eine analoge Multiplikatorschaltung [44] vornehmen. Dazu muß das Referenzsignal zunächst durch einen Komparator so aufbereitet werden, daß der gewünschte, um die Null-Linie symmetrische Rechteckpuls $r(t)$ entsteht. Die Multiplikation wird dann unmittelbar durchgeführt und der Mittelwert durch eine Tiefpaßglättung vorgenommen. An den Multiplizierer (Vier-Quadranten-Multiplizierer) stellen sich Forderungen hinsichtlich des Frequenzganges und der Linearität, da diese Parameter unmittelbar in das Meßergebnis eingehen.

Für technische Realisierungen läßt sich die Multiplikation einfacher gestalten, da ja nur mit $+1$ oder -1 multipliziert werden muß. Es sind also nur das Meßsignal und dessen invertiertes Signal erforderlich, zwischen denen dann, vom Referenzsignal gesteuert, umgeschaltet wird (Bild 114). Diese Schaltung ist bei gleicher Qualität einfacher aufzubauen. Da anstelle der Multiplikation nur Schaltvorgänge ausgeführt werden, geht die Amplitude von $r(t)$ nicht in das Ergebnis ein. Mit dem optionalen Phasenschieber kann der PSG auf die Anwedung, d.h. die Erzeugung von $s(t)$, abgestimmt werden (Nullpunktseinstellung).

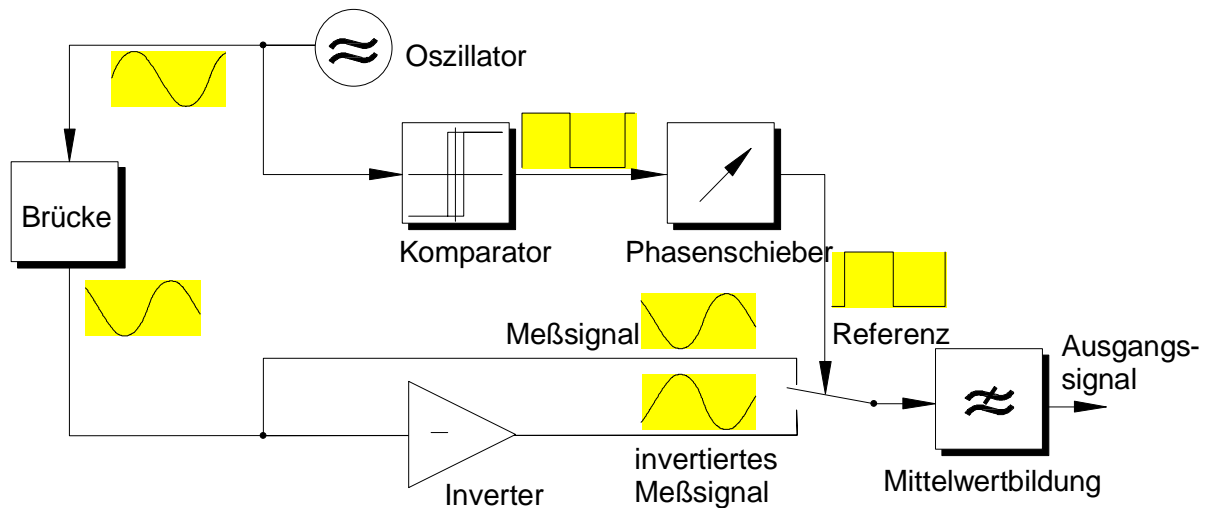


Bild 114: Funktionsprinzip einer phasenselektiven Gleichrichtung

Da die phasenselektive Gleichrichtung einer Demodulation ähnelt [28] wird das Verfahren auch als Trägerfrequenzverfahren bezeichnet. Weitere Bezeichnungen sind phasenabhängige Gleichrichtung oder phasensensitive Gleichrichtung.

Ein weiterer großer Vorteil, außer der Vorzeichenerkennung, ist die Unterdrückung von unerwünschten Signalanteilen anderer Frequenz, als die Trägerfrequenz (Frequenz des Referenzsignals). Nehmen wir z.B. an, dem Signal $s(t)$ sei ein Gleichanteil S_{DC} überlagert. Durch die Mittelwertbildung innerhalb einer Periode wird der einmal positive und einmal negative Anteil von S_{DC} sich aufheben und damit in das gemittelte Signal nicht mehr eingehen. Lediglich die Welligkeit des ungemittelten Signal wird erhöht (höhere Frequenzanteile):

$$\overline{s_{PSG}} = \overline{r(t) \cdot (s(t) + S_{DC})} \tag{300}$$

Setzen wir dieses Signal in Gl.(297) ein, dann mittelt sich S_{DC} aus. Die Konsequenz daraus ist, daß bei kleinen Meßsignalen $s(t)$ zuerst verstärkt und dann phasenselektiv gleichgerichtet wird. Tritt im Verstärker ein Offset-Fehler auf, wird dieser vom PSG unterdrückt. Wird zuerst phasenselektiv gleichgerichtet und dann verstärkt, ist dies nicht der Fall. Ähnlich werden auch Störsignale unterdrückt, deren Frequenzanteile nicht in einem bestimmten Vielfachen der Trägerfrequenz liegen (Mischvorgang).

PSG finden sich in vielen unterschiedlichen Realisierungen. Ein vereinfachtes Schaltungsbeispiel nach dem Funktionsprinzip aus Bild 114 zeigt Bild 115. Es genügt ein einfaches Referenzsignal $r(t)$, das hier z.B. ein Digitalsignal, gewonnen aus einem Komparator, sein kann. Es wird invertiert, so daß die als Schalter fungierenden Feldeffekttransistoren T1 und T2 abwechselnd stromleitend werden. Das Meßsignal $s(t)$ wird über den Übertrager Tr geführt, der über eine symmetrische und mittig geerdete Sekundärwicklung verfügt. Es liegt somit das Meßsignal und das zur Masse invertierte Meßsignal vor. Anmerkung: Tr kann bereits Bestandteil der Meßbrücke oder eines induktiven Gebers sein.

Die Sperrschicht-p-Kanal-FETs (T1..T3) sind vorzugsweise als Transistorarray auf einem gemeinsamen Substrat untergebracht. Die Sourceanschlüsse liegen auf dem fiktiven Massepotential des N-Eingangs von OpV1 (Summiererschaltung). Die FETs leiten bei einer

Gate-Source-Spannung von Null am besten. Die Schaltung ist so dimensioniert, daß beim anliegen des Steuersignals (Gatespannung) die FETs sperren. T3 dient der Temperaturkompensation des Durchgangswiderstandes und ist quasi immer leitend. Die Durchgangswiderstände von T1..T3 treten im Verstärker nicht mehr auf, wenn sie alle gleich groß sind (Transistorarray!).

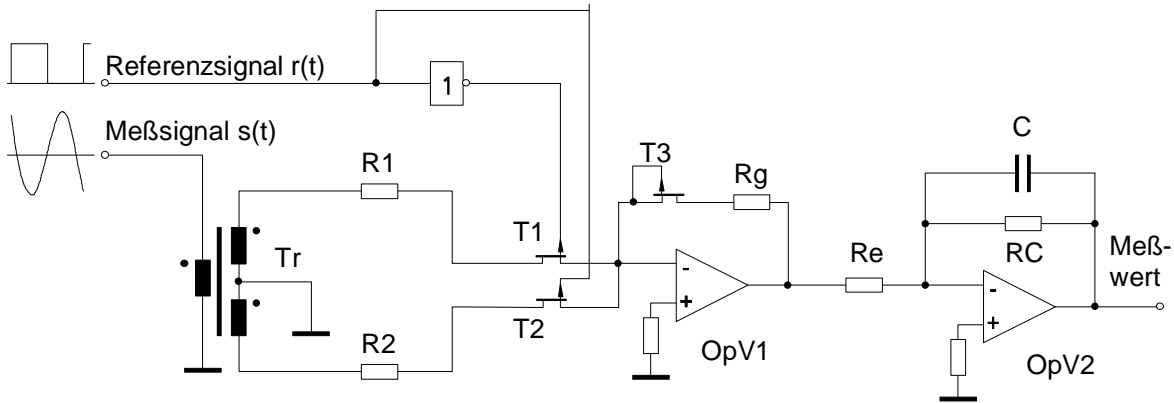


Bild 115: Schaltungsbeispiel (Prinzip) eines phasenselektiven Gleichrichters (PSG)

OpV1 summiert die (geschalteten) Halbperioden des Signals und verstärkt sie gleichzeitig mit dem Faktor $-R_g/R_1$ beziehungsweise $-R_g/R_2$. Somit ist $R_1=R_2$ zu wählen. Mit OpV2 (VZ1-Glied) wird die gleitende Mittelwertbildung des phasenselektiv gleichgerichteten Signals durchgeführt. Wegen der möglichen Offsetfehler von OpV2 sollte dort keine Verstärkung mehr vorgenommen werden, d.h. $R_e=R_C$ ist vorteilig. Die Grenzfrequenz $1/(R_C C)$ ist der Trägerfrequenz so anzupassen, das die Mittelwertbildung nicht zu träge wird aber die Restwelligkeit des PSG-Signals (Ausgang des OpV1) den Forderungen entsprechend geglättet wird.

2.4.4 Zähler

Lernziel: Zähler, Zahlensystem, Grundprinzip, Anwendungen

2.4.4.1 Kodierung

Neben den bereits beschriebenen elektromechanischen Zählern sind in elektrotechnischen Anwendungen, wie Ereigniszählung - insbesondere rascher Zählimpulsfolge -, Frequenzmessung oder Periodenlängenmessung elektrischer Signale, die elektronischen Zähler von großer Bedeutung.

Die elektronischen Zähler basieren heute ausschließlich auf der Basis logischer, digitaler schaltungen, die auf das binäre (duale) Zahlensystem basieren. D.h. im Gegensatz zur menschlichen Gewohnheit wird in technischen Realisierungen nicht das dezimale System benutzt. Betrachten wir unsere Zahlensysteme etwas ausführlicher. So steht z.B. unsere Schreibweise der ganzen Zahl "4711" eigentlich für die Kurzform des mathematischen Ausdrucks

$$\text{Dezimalzahl } 4711 = \underbrace{4 \cdot 10^3}_{4 \text{ Tausender}} + \underbrace{7 \cdot 10^2}_{7 \text{ Hunderter}} + \underbrace{1 \cdot 10^1}_{1 \text{ Zehner}} + \underbrace{1 \cdot 10^0}_{1 \text{ Einer}}, \quad (301)$$

also die Zerlegung in eine Summe der entsprechenden Anzahl von Einer, Zehner, Hunderter usw. Das bedeutet, daß für jede sog. Stelle ein Faktor angegeben werden muß, der so viel Werte annehmen kann, wie die Zahlenbasis unterschiedliche Ziffern hat. Im dezimalen Zahlensystem wären dies die zehn Dezimalziffern 0 bis 9. Bei mechanischen Zählern (Zählräder mit Stoßklinke) werden z.B. die zehn Ziffern durch zehn mögliche Positionen des Zählrades dargestellt.

Die elektrischen (Relais, Schalter) und elektronischen Schaltelemente (Digitalbausteine) lassen besonders die Realisierung von zwei Schaltzuständen zu: z.B. Kontakt offen/zu oder Spannungspegel 0V/5V. Wir nennen diese beiden Zustände dann logisch-Null (0) oder logisch-Eins (1) und weisen einem solchen Signal den Informationsbegriff "Bit" (engl.: binary digit) zu. Für elektronische Digitalschaltungen wird deshalb das binäre (duale) Zahlensystem verwendet, also auf der Basis 2 aufbauend. Wir schreiben dann z.B. für die Binärzahl "10011" analog Gl.(301)

$$\text{Binärzahl } 10011 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \quad (302)$$

oder mit dezimalen Potenzen ausgedrückt (ließen sich auch als Dualzahlen angeben)

$$\text{Binärzahl } 10011 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \quad (303)$$

Beim Zählen ergeben sich entsprechend der Bedeutung nach Gln.(302) und (303) dann Kombinationen von 0-1-Werten der unterschiedlichen Stellen, wie in Tabelle 8, Spalte "Binärcode", dargestellt. Die Ziffer der höchsten vorkommenden Potenz, bzw. Stelle (in Gl.(303) $2^4=16$), wird höchstwertigstes Bit (engl.: MSB=most significant bit), die Ziffer der niederwertigsten Potenz (Stelle) wird niederwertigstes Bit (engl.: LSB=least significant bit) genannt.

Wird in einem Zahlensystem anderer Basis gezählt, z.B. der Basis 8 oder 16 oder der Basis 10, was der menschlichen Gewohnheit entgegen kommt, ist dies technisch mit digitalen Elementen der Basis 2 auch möglich. Die Zählwerte sind dann in geeigneter Weise binär zu codieren.

Bei Zahlensystemen, deren Basis sich in Potenzen von 2 ausdrücken läßt, also z.B. 2, 4, 8 (Oktalsystem), 16 (Hexadezimal- oder richtig Sedezimalsystem) ist die Codierung sehr einfach. Die einzelnen Ziffern werden durch zusammengefassten Binärcode ausgedrückt, z.B. 4 Binärstellen zu einer Hexadezimalstelle (Tabelle 8, Spalte "Hex-Code").

Bei der Basis 10 könnten z.B. die 10 Ziffern in einem 1-aus-10-Code dargestellt werden, wo nur jeweils eine der 10 Codestellen den Wert 1 annimmt. Der Code "verbraucht" aber sehr viele Binärstellen. Günstiger ist das Zusammenfassen wie beim Hex-Code, wobei aber auf die möglichen Zählwerte über 0..9 hinaus verzichtet wird. Solche binär codierten Dezimalcodes (BCD-Code oder 8421-Code vom Stellenwert der Binärzahlen) werden sehr häufig eingesetzt [36][45][47] (Tabelle 8, Spalte "BCD-Code").

Betrachten wir einen Zähler als sogenanntes Schaltwerk [47]. Ein solches kann unterschiedliche Zustände annehmen, die quasi den Zählerstand, mithin den Zählwert, repräsentieren. Dieser Zustand wird in einem Speicher festgehalten (Bild 116). Bei jedem Zählimpuls muß der Inhalt des Zustandspeichers auf den nächsten, nachfolgenden Zustand gesetzt werden. Aus dem aktuellen Zustand kann der nachfolgende leicht bestimmt werden, i.d.R. um den Wert 1 erhöht (Transitionsbeziehung) der als nächster Wert dem Speicher zugeführt wird. Trifft den nächste Zählimpuls ein, wird der neue Wert in den Speicher

übernommen. Die Transitionsbeziehung muß nicht zwingenderweise eine Erhöhung um den Wert 1 bewirken, da die Zustände ja nur codiert angegeben werde. Lediglich die Reihenfolge muß zu einen sinnvollen Zählwert führen. Das Zustandsregister kann in mit Bauelementen der Digitaltechnik z.B. mit sog. Flip-Flops (D-Flip-Flops) realisiert werden [36][45][47]. Vor Zählbeginn wird das Register auf den Startzustand - i.d.R. 00...00, d.h. gelöscht - gesetzt.

Zählwert	Hex-code	Binär-code				1-aus10-Code										BCD-Code			
		8	4	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	8	4	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	6	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	7	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	8	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	9	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	A	1	0	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	B	1	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	C	1	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	D	1	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	E	1	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	F	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelle 8: Kodierung von Zählwerten in unterschiedlichen Codes. Von links nach rechts: dezimal, hexadezimal (sedezimal), binär, 1-aus10 und BCD-Code.

Die Transitionsbeziehung ist ein Schaltnetz, das den n-stelligen Zustandscode wiederum in einen n-stelligen Zustandscode abbildet. Dies kann z.B. mittels eines Speichernetzwerk (ROM: Read Only Memory) oder mit logischen Verknüpfungselementen (UND, ODER, ..) erfolgen. Hier wird die Reihenfolge der Zustände festgelegt.

Die Ausgabekodierung ist ebenfalls ein Schaltnetz, das den n-stelligen Zustandscode in einen m-stelligen Ausgabecode abbildet, wiederum mittels ROM oder Verknüpfungen. Im einfachsten Fall kann es entfallen, d.h. es liegt eine direkte Abbildung vor. Die Zählung muß dann im Ausgabecode erfolgen, z.B. im BCD-Code. Ein Beispiel für eine häufig vorkommende Abbildung ist die Umsetzung eines BCD-Zustandscode in einen 7-Segment-Anzeigecode (Bild 46 b). D.h. je Stelle BCD-Code, dargestellt mit 4 Stellen Binär-code (4 Bit) sind 7 Bit für die Ansteuerung der Anzeige erforderlich, d.h. m=7. Bei der Punktmatrix, z.B. 5x7-Matrix (Bild 46 a) sind sogar 35 Bit erforderlich, d.h. m=35. Als letztes Beispiel sei noch ein 8-Bit-Zähler (=256 Zustände) im Binär-code (Dualcode) aufgeführt, der über eine Balkenanzeige (Bild 46 c) verfügt. Hier wäre m=256.

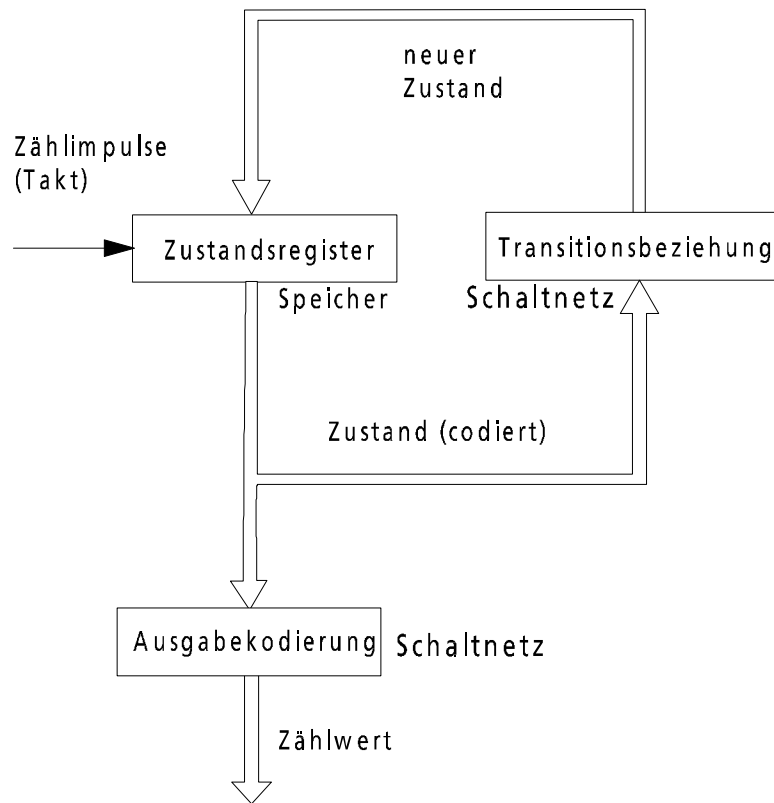


Bild 116: Zustandspeicher mit Übergangsrelation (Schaltwerk)

Eine Zählerstruktur nach Bild 116 könnte sowohl für ein- als auch für mehrstellige Zähler gültig sein. Bei mehrstelligen Zählern liegen aber u.U. sehr viele, nämlich

$$N_Z = B^n \tag{304}$$

Zustände vor, wobei B die Basis des verwendeten Zahlensystems und n die Stellenzahl sind, d.h. bei 8 Stellen im Dezimalsystem ist $N_Z = 10^8 = 100.000.000!$ Deshalb werden für jede Stelle häufig geschlossene Einheiten gebildet, wir nennen sie hier Basismodule (Bild 117), die dann zu mehrstelligen Zählern verbunden werden. Hat ein Basismodul seinen höchsten Zählwert erreicht (B-1), geht es beim nächsten Zählimpuls wieder in den Startzustand, signalisiert aber einen Übertrag (engl.: carry) (Zustand: Start mit Übertrag), der an die nächst höhere Stelle weitergeleitet wird. Der Übertrag wird mit dem nächsten Zustand (Zählimpuls) wieder auf logisch 0 gesetzt. Außer dem Takteingang (Zählimpulseingang) besitzt es noch einen Freigabeeingang, mit dem das Hochzählen "freigegeben" oder blockiert wird. Ein Reset-Eingang setzt den Zähler auf 0. Mitunter verfügen die Module auch über einen Preset-Eingang, mittels dessen kann das Modul auf einen definierten Wert eingestellt werden. Dieser Wert wird über Eingangsleitungen angelegt. Reset ist sozusagen die Sonderform des Presets auf Null. Das Zusammenschalten der Stellen kann als sog. Synchron- oder Asynchronzähler (s.unten) erfolgen.

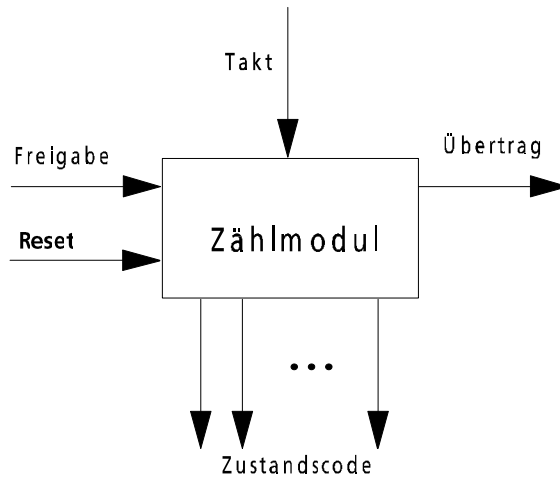


Bild 117: Basismodul eines Zählers mit Takteingang, Freigabe und Übertrag für n Zustände im Binärcode

Solche Basiszählmodule sind für Binärcores oder BCD-Codes als integrierte Digitalschaltung verfügbar.

2.4.4.2 Asynchrone Zähler

Beim Asynchronzähler sind alle Freigabeeingänge auf logisch 1, d.h. alle Basiszählmodule sind zählbereit. Der eigentliche Zählimpuls wird nur an den Takt T des Basismoduls der niederwertigsten Stelle (LSB) gelegt. Der Takt T der jeweils nächsthöheren Stelle ergibt sich aus dem Übertrag Ü der vorherhenden Stelle (Bild 118).

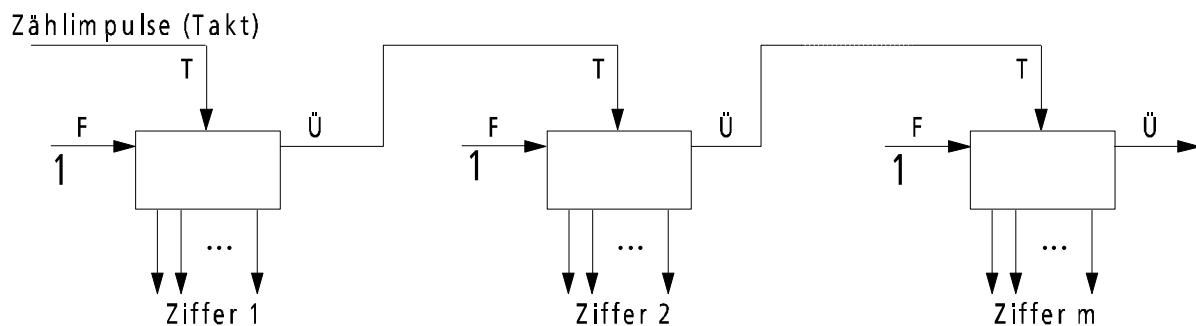


Bild 118: Asynchroner Zähler, zusammengesetzt aus Basiszählermodulen

Dieser sehr einfach strukturierte Zähler arbeitet quasi in Anlehnung an die mechanischen Räderzählwerke, wo eine Mitnahmeeinrichtung des jeweiligen Zählrades das Zählrad der nächsthöheren Stelle um eine Zählposition weitertreibt, wenn es eine Umdrehung vollbracht hat (vgl. Kilometerzähler im Auto).

Der Nachteil des elektronischen Asynchronzählers ist offensichtlich. Bei sehr schnellen Zählimpulsen wirken sich die Signallaufzeiten durch die Digitalbausteine (Gatter, Flip-Flops) aus. Das Zählergebnis liegt also erst dann vollständig vor, wenn die letzte Stelle (MSB) ihren Zählvorgang abgeschlossen hat. Dies ist jedoch erst dann der Fall, wenn die vorhergehende Stelle ihren Zählvorgang beendet hat und dies erst dann durch den Übertrag "gemeldet" hat, usw. D.h., diese Zählerstruktur ist nur für relativ langsame Zähler geeignet.

2.4.4.3 Synchrone Zähler

Um schneller das Zählergebnis verfügbar zu machen, müssen die Signallaufzeiten verkürzt werden. Dies kann durch die Synchronzählerstruktur (Bild 119) erreicht werden.

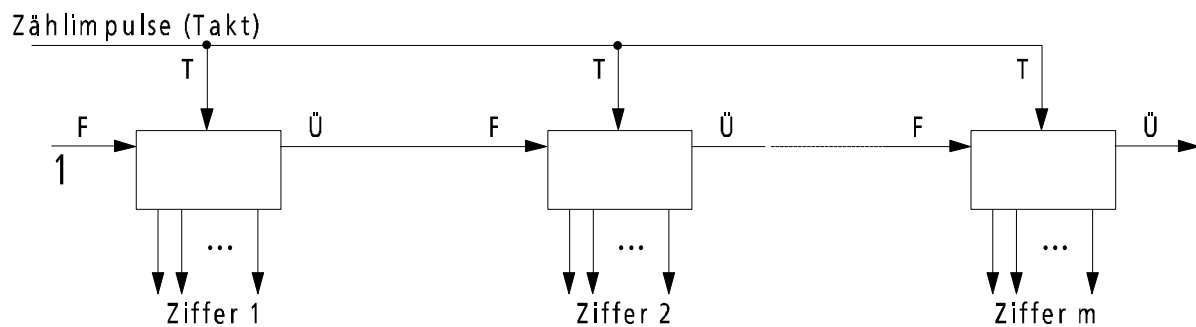


Bild 119: Synchroner Zähler, zusammengesetzt aus Basiszählermodulen

Hier wird der Zählimpuls als Takt an alle Takteingänge T der Basiszählmodule gelegt. Die Steuerung, daß nicht alle Stellen zeitgleich zählen, wird jetzt über die Freigabeeingänge vorgenommen. Das Modul der niederwertigsten Stelle (Ziffer 1) ist immer freigegeben und zählt somit bei jedem Takt. Solange der Übertrag \ddot{U} auf logisch 0 liegt, ist die nachfolgende Stelle blockiert und ignoriert damit die Zählimpulse. Springt die Stelle i wieder in ihren Startzustand, signalisiert sie den Übertrag und gibt die Stelle $i+1$ für diesen einen Zählimpuls frei.

Der Geschwindigkeitsgewinn liegt darin, daß der Übertrag sehr schnell und bereits während des letzten Zählimpulses generiert werden kann. Es muß also nicht das Zählergebnis des Basismoduls abgewartet werden.

Weitere Zählerstrukturen und deren digitalen Schaltungen finden sich in [36][45][47].

2.4.4.4 Anwendungen

Als elektrisches Meßgerät dient der Zähler hauptsächlich drei Anwendungen:

- Ereigniszähler: Elektrische Zählimpulse werden fortlaufend oder über einen Zeitraum gezählt. Wird der Zeitraum durch ein weiteres Signal gesteuert (sog. Gate, engl.: Tor) kann dies durch eine logische UND-Verknüpfung aus Zählimpuls und Gatesignal (Torschaltung) erfolgen.
- Frequenzmessung: Es werden die Schwingungen eines elektrischen Signals gezählt. Vor jeder Zählung werden die Zähler auf 0 gesetzt. Das Signal wird i.d.R. über einen Komparator in ein digitales umgesetzt und dessen Anzahl steigender oder fallender Flanken gezählt. Die Torschaltung wird dabei über eine definierte Zeitbasis gesteuert, z.B. 1 Sekunde, dann entspricht der Zählwert exakt der Frequenz in Hertz. Je nach Frequenzbereich können auch andere Zeitbereiche herangezogen werden. Es gilt: je länger der Zeitbereich (Zeitfenster), desto höher kann die Frequenz aufgelöst werden. Die Länge des Zeitfensters ist im Zählergebnis aber zu berücksichtigen.
- Periodenlängenmessung: Bei sehr niederfrequenten Signalen empfiehlt es sich statt der Frequenz f die Periodenlänge $T=1/f$ zu messen. Denn für eine entsprechende Auflösung muß dann das Zeitfenster sehr lang sein, z.B. müßte

bei $f = 0,001$ Hz auf 3 Dezimalstellen = 1000 Zählereignissen zu messen, sind 1 Million Sekunden (!) erforderlich. Die Meßzeiten werden dann unakzeptabel lange. Als Zählimpulse wird hier eine Zeitbasis verwendet, die z.B. 1000 Impulse pro Sekunde konstant abgibt. Das Meßsignal steuert jetzt die Torschaltung und gibt das Zählen für die Dauer einer Periode frei. Bei 1000 Impulsen pro Sekunde entspricht damit der Zählwert der Periodenlänge in Millisekunden. Zur höheren Auflösung kann auch hier wieder das Zeitfenster größer gewählt werden, was aber im Zählwert berücksichtigt werden muß. Auch hier muß vor jeder Messung der Zähler auf 0 gesetzt werden.

2.4.5 Analoge/digitale Wandlung

Lernziel: Signalzerlegung, Quantisierungs- und Abtastfehler, Abtastung, D/A-Wandlung, div. AD-Wandler

2.4.5.1 Abtastung und Quantisierung

In zunehmendem Maße finden sich, aufgrund der stark innovativen Digitaltechnik, insbesondere der Mikrorechner-technik, automatisierte Meßdatenverarbeitungen. Die Meßwerte müssen dann in einer geeigneten Form der Meßwertverarbeitung zugänglich sein. Die Meßwerte liegen normalerweise als Zahlenwerte mit einer Einheit vor. Die Digitaltechnik benutzt, wie wir bereits bei den Zählern gesehen haben (Tabelle 8), Binärcodes oder verwandte Kodierungen, die aus Dualstellen zusammengesetzt sind.

Da mit digitaltechnischen Maschinen keine Einheiten, sondern nur Zahlen verarbeitet werden können, werden die Meßwerte M_i zunächst von den Einheiten E_i bereinigt, so daß nur noch ein reiner Zahlenwert verbleibt. Dies erfolgt durch beziehen -"normieren"- auf einen Bezugswert R_i mit dem Zahlenwert Z_{R_i} gleicher Einheit:

$$M_i = Z_i \cdot E_i \Rightarrow M_{Ni} = \frac{M_i}{R_i} = \frac{Z_i \cdot E_i}{Z_{R_i} \cdot E_i} = \frac{Z_i}{Z_{R_i}} \quad (305)$$

Der Zahlenwert (Z_{R_i}) der Bezugsgröße (R_i) wird so gewählt, daß der Wertebereich der Kodierung, z.B. beim n -stelligen Binärcode 2^n , möglichst weit ausgeschöpft (Auflösung!), aber nicht überschritten wird.

Diese Zahlenwerte können dann

- in andere Kodierungen umgesetzt werden, z.B. Gleitpunktcodes [47];
- über mathematische Algorithmen (siehe z.B. [34][33][26][31]) verarbeitet werden (Digitale Signalverarbeitung, engl.: signal processing);
- in, ggf. verarbeiteter Form, wieder als analoges Signal ausgegeben werden;
- als Entscheidungsgrundlage für einen Automaten dienen;
- auf digitalen Speichermedien (RAM=random access memory, Magnetplattenspeicher,..) gespeichert werden;
- als Zahlenwerte angezeigt werden (z.B. Ziffernanzeige, Bild 46).

Die Umwandlung von Meßsignalen - hier elektrische Spannungen oder Ströme - erfolgt mit sogenannten Wandler oder Umformer (engl.: Converter). Werden Signale (analoge Größe) in Binärcodes (digitale Darstellung) umgewandelt, benutzen wir von Analog-Digital-Wandler (AD-Wandler, ADU=Analog-Digital-Umformer oder ADC=analog digital converter). Wird

Binärcode zurück in ein elektrisches Analogsignal umgesetzt, benutzen wir einen Digital-Analog-Wandler (DAU, DAC). Der Bezug auf den Bezugswert erfolgt auch hier im Wandler (renormieren).

Das analoge Signal ist i.d.R. zeitkontinuierlich, also z.B. eine Spannung $u(t)$, bei der zu jedem Zeitpunkt t ein Spannungswert u zugeordnet ist. Bei infinitesimaler Betrachtung stellen sich in einem Zeitintervall ($t_1 \dots t_2$) - zumindest theoretisch - unendlich viele, zumindest beliebig viele, Werte für u ein. Diese "Werteflut" kann mit den technischen Mitteln weder umgewandelt noch verarbeitet werden. Es kann also keine kontinuierliche Zahlenkolonne erzeugt werden, sondern nur eine Zahlenfolge

$$M = \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_n\}. \quad (306)$$

M ist die Menge der Zahlenwerte M_i . Der aufsteigende Index i kennzeichnet i.d.R. die fortschreitende Zeit. Folglich liegt nicht mehr die komplette Beschreibung des Signals vor, sondern nur Proben. Sie werden als Abtastwerte (samples) bezeichnet. In Bild 120 sind diese Abtastungen als senkrechte Striche dargestellt.

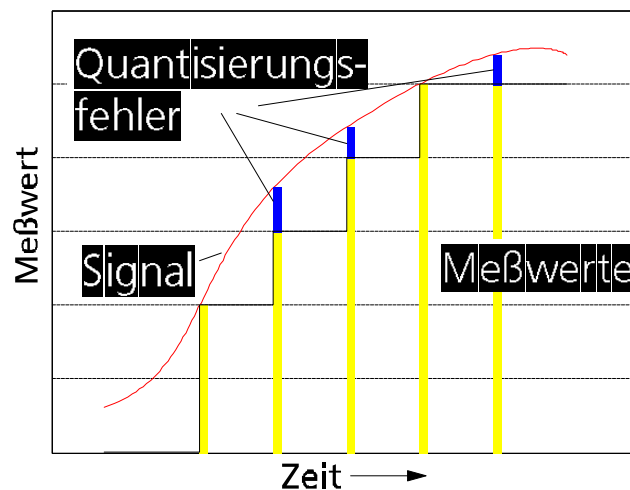


Bild 120: Abtastung eines Signals mit Quantisierungsfehlern

Normalerweise werden die Abtastungen äquidistant, d.h. in gleichbleibenden Zeitabständen ΔT durchgeführt. Wir erhalten die Meßwerte des Meßsignals $M(t)$ mit

$$M_i = M(t = i \cdot \Delta T) \quad (307)$$

die sich mit fortschreitender Zeit zu Wertefolge nach Gl.(306) zusammensetzen.

Zwischen den Abtastwerten kann dann der Signalwert mathematisch interpoliert und damit rekonstruiert werden. Bei Polynominterpolation treten im Wesentlichen Polynome nullten und ersten Grades auf. Bei Polynomen 0ten Grades, d.h. konstant gehaltener Meßwert, erfolgt die Signaldarstellung stückweise konstant und entspricht dem letzten Meßwert (Bild 120). Diese Interpolation läßt sich am einfachsten über sogenannte Abtast-Halteglieder realisieren. Das abgetastete und interpolierte Signal folgt hier einem treppenförmigen Verlauf, wobei die "Treppenstufen" unterschiedliche Höhen, abhängig von den Signalwerten M_i , aufweisen. Bei Polynomen ersten Grades würden die Zwischenwerte zweier aufeinanderfolgenden Meßwerte durch eine Gerade interpoliert werden.

Wie schnell abgetastet wird, hängt von der Anwendung und vor allem vom Signal ab. Bestimmend hierfür ist die am höchsten vorkommende Frequenz f_{\max} , mithin die Bandbreite, des Signals. Nach dem Shannon'schen Abtasttheorem [31] ist mit mindestens der doppelten Frequenz $f_{\text{Tast}}=1/\Delta T$ von f_{\max} abzutasten. Dann läßt sich das Signal vollständig mathematisch beschreiben und rekonstruieren. Bei zu kleiner Abtastung treten Frequenzgemische auf (engl.: aliasing [30]). Bei schnellerer Abtastung steigt die Datenmenge, die gewandelt und verarbeitet werden muß. In der Praxis ist aus diesen Randbedingungen eine geeignete Abtastrate zu finden. Genügt die Messung des zeitlich gleitenden Mittelwertes, kann mittels eines Tiefpasses (VZ-1-Glied) vor dem Wandler, also noch im analogen Signal, f_{\max} herabgesetzt werden. Für die detailliertere Betrachtung sei hier nur auf weiterführende Literatur [31][26][24][32] und die nachrichtentechnischen Disziplinen verwiesen.

Die Abtastung muß nicht in äquidistanten Abständen erfolgen. So kann es z.B. sinnvoll sein, bei einem Signal, das sich zunächst kaum ändert (geringe Bandbreite), sehr langsam abzutasten, wenn eine Änderung (Frequenzanteile!) eintritt, die Abtastung zu erhöhen. In diesem Fall ist die Abtastung aber zu steuern und die Abtastwerte als Wertepaar mit der Zeitinformation zu versehen. Die meisten Algorithmen der numerischen Mathematik, bzw. digitalen Signalverarbeitung setzen aber äquidistante Abtastung voraus.

Da für die Wandlung und Verarbeitung nur eine endliche Stellenzahl des Digitalcodes vorliegt, muß der Wertebereich des analogen Signals quantisiert, d.h. in Stufen unterteilt werden (Bild 120). Damit stellt sich das Problem der Zuordnung ein. Ein analoger Wert muß dann einem bestimmten Intervall zugeordnet werden, das durch einen eindeutigen Digitalcodewert definiert ist. Z.B. erfolgt in Bild 120 die Zuordnung durch überschreiten der unteren Intervallgrenze. Es sind aber auch andere Zuordnungen möglich. Es werden sozusagen die Treppenstufen des abgetasteten Signals (s.o.) in ein definiertes Raster gezwängt und damit stellt sich ein Quantisierungsfehler ein. Dieser ist umso geringer, je kleiner das Stufenraster ist.

Durch den treppenförmigen Verlauf, dessen Stufen, bzw. Stufenkanten, gewissermaßen nicht mehr exakt dem Signalverlauf folgen, fügen sich zu den originären Frequenzanteilen des Signals noch zusätzliche Frequenzanteile hinzu. Denn jede Änderung, auch sprunghafte, bewirkt Frequenzanteile höherer Frequenz. Je höher die Sprünge sind und je häufiger sie auftreten, desto größer sind diese Frequenzanteile in Intensität und Frequenz. Da diese Sprünge vom Signal und von den Stufen abhängig sind, stellen sie sich mehr oder weniger zufällig ein. Die Folge ist ein Effekt, der einem Signalrauschen gleicht. Wir nennen dieses Rauschen Quantisierungsrauschen.

Betrachten wir ein Frequenzspektrum (Fast Fourier Transformierte) eines Sinussignals (Bild 121). Hier ist das Spektrum mehrerer Sinusschwingungen, abgetastet mit 1024 Werten aufgetragen. Der Maßstab der Ordinate ist logarithmisch (dB-Werte), wodurch wir die Fensterfunktion⁵ (hier: Hammingfenster [30][26]) sehr deutlich erkennen können. Bei linearem y-Maßstab würde sich die Spektrallinie der Sinusfunktion stark ausprägen.

⁵ Mit einer Fensterfunktion wird das Ausblenden eines Signals auf endliche Länge (=endliche Anzahl Abtastwerte) vorgenommen. Bei einem rechteckigen Fenster, d.h. das Signal wird unverändert, aber nur innerhalb eines definierten Zeitintervalls betrachtet, ergibt sich im diskreten Spektrum eine Aneinanderreihung des Spektrums der Fensterfunktion, in diesem Fall der Spaltfunktion [31]. Deren Spektrum ist vergleichsweise breit, auch wenn es eine starke Ausprägung für die "diskrete" Spektrallinie aufweist. Ein engeres Spektrum ergibt sich durch ein weiches Ausblenden, z.B. mittels Hamming-Fenster, einer verschobenen Cosinusfunktion: $(\cos(x)+1)/2$. Weiterführende Literatur siehe [30] und [42].

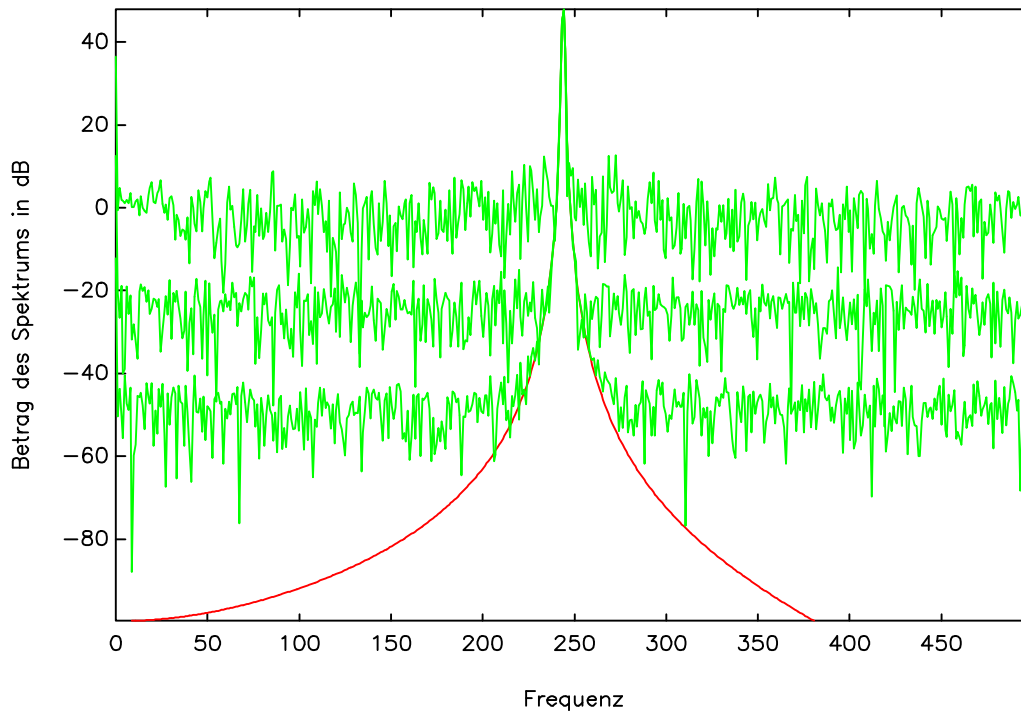


Bild 121: Quantisierungsrauschen beim AD-Wandler mit Dualcode von 4..12Bit, durch unterschiedliche Quantisierungsstufenzahlen (Kurven von unten nach oben: unquantisiert, 4096 Stufen= 2^{12} , 256 Stufen= 2^8 , 16 Stufen= 2^4). Anmerkung: dargestellt ist der Betrag des Spektrums einer Abtastfolge von 1024 Werten von 256 Perioden einer Sinusschwingung mit einem Cos-Hammingfenster. Je Bit ergibt sich ein um ca. 6 dB (=Faktor 2) geringeres Rauschen. (Erläuterungen siehe Text.)

Die unterste Kurve entspricht dem Spektrum des abgetasteten, aber unquantisierten Meßsignals und weist das Maximum bei der Frequenz des Sinussignals auf. Zu diesem Verlauf überlagern sich durch die Quantisierung nun Frequenzanteile (Quantisierungsrauschen). Das Maximum bleibt zwar erhalten, aber dort, wo das Signalspektrum kleine Werte annimmt, übersteigt das Spektrum des Quantisierungsrauschens das Signalspektrum. In diesem Beispiel sehen wir deutlich, daß die Intensität des Quantisierungsrauschens von der Stufenhöhe abhängt. Der Signalwertebereich $-1..+1$ wurde in 16, 256 und 4096 Stufen unterteilt. Dies entspräche einer AD-Wandlung in den Binärcode mit 4, 8 bzw. 12 Bit. Da mit jedem zusätzlichen Bit die Stufenzahl verdoppelt wird, nimmt die Stufenhöhe auf die Hälfte ab. Der Faktor 2 entspricht etwa 6 dB, bzw. der Faktor $1/2$ entspricht etwa -6 dB. Da zwischen den drei Kurven der quantisierten Verläufe je ein Unterschied von 4 Bit vorhanden ist, liegen die Spektren des Quantisierungsrauschens etwa $4 \times 6 \text{ dB} = 24 \text{ dB}$ auseinander.

Die Konsequenz ist, daß bei der Signalverarbeitung, z.B. die Berechnung des Spektrums, eine endliche Auflösung durch die Quantisierungsfehler spürbar wird. So werden Signalfrequenzen, die unterhalb des Quantisierungsrauschens liegen, mit einer digitalen Fourieranalyse nicht mehr entdeckt.

Die Höhen der Quantisierungsstufen müssen nicht notwendigerweise gleich sein. Es kann durchaus sinnvoll sein, bei einem Signal, das hauptsächlich nur um einen bestimmten Wert schwankt und damit dort den höchsten Informationsanteil besitzt, die Stufen (das Raster) fein

zu gestalten und für größere, seltene vorkommende Abweichungen das Raster zu verbreitern. Hier wäre die statistische Verteilung der Signalwerte als Kriterium maßgeblich, d.h. enges Raster für Zahlenwerte hoher Wahrscheinlichkeit, weites Raster für Zahlenwerte geringer Wahrscheinlichkeit. Ein typischer Anwendungsfall ist die digitale Telefonie. Bei der Verarbeitung wird der quantisierte Wert i.d.R. in einen Code höherer Stellenzahl (mehr Bits) aufgespreizt. Einige Werte des Codes bleiben daher unbesetzt.

2.4.5.2 Abtastglieder

Wie wir bei der Abtastung gesehen haben, werden aus dem originären, analogen Meßsignal Proben (samples) entnommen (Bild 120), die dann quantisiert werden. Für den technischen Vorgang des Quantisierens - eben der AD-Wandlung - wird die Zeit T_w benötigt. Der Signalwert des Signals $M(t)$ ändert sich in dieser Zeit aber auf $M(t+T_w)$. Der Abtastwert muß also in einem definierten Zeitraum T_w konstant gehalten werden. Würden wir ihn bis zum nächsten Abtastwert konstant halten, ergäbe sich eine Interpolation nullter Ordnung (s.o.).

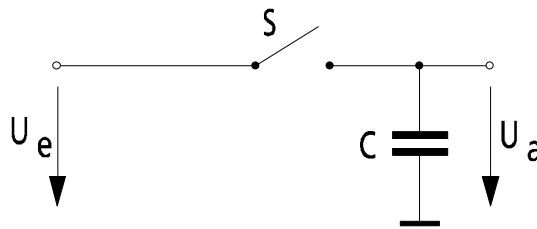


Bild 122: Prinzip eines Abtast-Haltegliedes (Abtastung nullter Ordnung)

Eine solche Abtastung können wir mit einem Abtast-Halteglied (engl. Sample and Hold, S&H) nullter Ordnung bewirken (Bild 122). Der Schalter wird zum Abtastzeitpunkt t kurzfristig geschlossen und damit der Kondensator C schnell auf die eingepreßte Momentanspannung des Meßsignals U_e aufgeladen. Der Schalter wird dann wieder geöffnet und bleibt bis zum nächsten Abtastzeitpunkt $t+\Delta T$ offen. U_a entspricht dann dem Momentanwert $U_e(t)$, sofern C nicht entladen wird.

In der Praxis wird nicht, wie in Bild 122 dargestellt, ein mechanischer Schalter S benutzt, sondern aufgrund der hohen Abtastfrequenzen i.d.R. Transistorschalter. Ein Schaltungsbeispiel zeigt Bild 123. Die Steuerspannung U_s ist im Ruhezustand negativ, so daß der selbstleitende FET geschlossen ist. Zum Abtastzeitpunkt wird U_s für die Dauer T_s ($T_s \ll \Delta T = \text{zeitlicher Abstand der Abtastwerte}$) auf hohes Potential ($U_s > U_{e\max}$) gelegt, so daß die Gate-Source-Spannung zu Null wird. Der Transistor T wird leitend und lädt den Kondensator C . Wird U_e eingepreßt, z.B. mittels eine Vorverstärkers oder Impedanzwandlers, dann lädt sich C innerhalb der Zeit $T_c = 5R_s C$ (R_s ist der Kanalwiderstand des Transistorschalters) nahezu vollständig auf U_e auf. Die Zeitdauer T_c ist damit kleiner als T_s zu fordern. Der nachgeschaltete Operationsverstärker in Impedanzwandlerschaltung verhindert ein Entladen von C zwischen den Abtastungen, so daß U_a konstant gehalten wird.

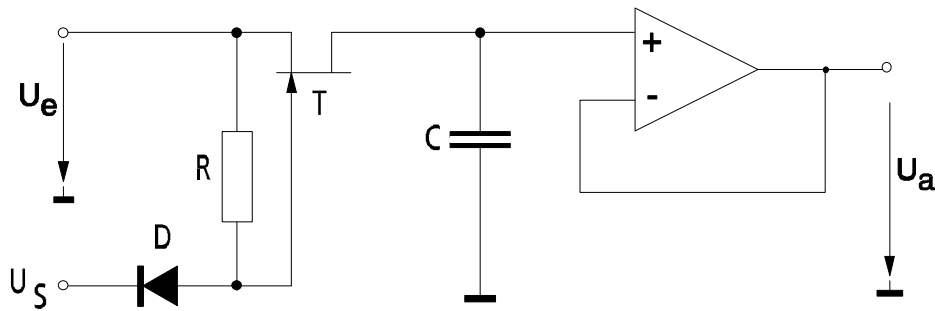


Bild 123: Abtast-Halteschaltung nullter Ordnung mit Feldeffekttransistor und Elektrometerverstärker [36].

C entlädt sich über den Sperrwiderstand von T und den Eingangswiderstand des Operationsverstärkers. Es empfiehlt sich für den OpV eine FET-Type (s. Tabelle 7) mit hohem Eingangswiderstand und extrem geringen Eingangsruhestrom einzusetzen. Die Entladung bestimmt eine untere Grenze für C. C kann aber auch nicht beliebig groß gewählt werden, da sonst seine Aufladung im Zeitraum T_s unzureichend ist. Die Aufladung erfolgt in der Zeit T_c und wird damit hauptsächlich vom Schalterwiderstand (T) mitbestimmt.

Sollen mehrere Signalpfade über einen Wandler AD-gewandelt werden, kann der AD-Wandler im sog. Multiplexbetrieb eingesetzt werden. Es werden dann an den Kondensator C mehrere Schalter $S_1..S_n$ angeschlossen, die dann über die n Steuerspannungen $U_{S1}...U_{Sn}$ die n Kanäle abwechselnd, i.d.R. zyklisch nacheinander, bedienen. Die vom AD-Wandler abgegebenen Zahlenfolge muß dann wieder in die n Kanäle separiert werden (Demultiplex). Dies bewirkt allerdings zwei Effekte. Erstens einen Zeitversatz der Abtastzeitpunkte zwischen den Kanälen, der bei einer eventuellen Signalverarbeitung zu berücksichtigen ist (siehe z.B. bei der Leistungsmessung nach Gl.(196)). Zweitens kann, da beim Umschalten von einem Kanal zum nächsten, die Kondensatorspannung völlig umgeladen werden muß, auch ein "Übersprechen" von einem zum nächsten Kanal erfolgen. Dies könnte nur durch extrem langes Aufladen (T_c) gänzlich unterdrückt werden.

Vermeidbar sind diese beiden Effekte durch n parallele Abtastglieder und nachgeschaltetem analogen Multiplexer. Hier ist nachteilig, daß doppelt so viele Schalter erforderlich sind und die Kondensatorspannung über einen langen Zeitraum konstant gehalten werden muß. Völliges Trennen ergibt sich bei n parallelen Abtast-Haltegliedern mit n nachgeschalteten AD-Wandlern.

2.4.5.3 Komparatoren

Die zentrale Aufgabe der AD-Wandlung ist die Zuordnung eines analogen Meßwertes in ein Stufenraster. Es muß also ein Spannungsvergleich zwischen dem Meßwert und eines Stufenwertes durchgeführt werden (Bild 120). Diese Aufgabe wird von einem Komparator durchgeführt. Er liefert ein digitales Ausgangssignal als Ja-Nein-Aussage, ob der Vergleich Meßwert (Meßspannung) > Stufenwert (Vergleichsspannung) zutrifft. Einige Komparatorschaltungen auf der Basis von Operationsverstärkern werden nachfolgend diskutiert. Daneben gibt es noch Lösungen für Komparatoren, die auf andere Schaltungskonzepte aufbauen [36].

Vom Grundprinzip her kann die Aufgabe bereits durch einen einfachen, nicht gegengekoppelten OpV, d.h. Differenzverstärker mit unendlich hoher Verstärkung, durchgeführt werden (vgl. statische Kennlinie: Bild 85). Belegen wir den N-Eingang mit der

Meßspannung U_2 und den P-Eingang mit der Vergleichsspannung U_1 (Bild 124, links oben) dann ergibt sich nach Gl.(240) und unter Berücksichtigung der maximalen Ausgangsspannung $U_a=U_{amax}$ bei $U_2 < U_1$ und $U_a=U_{amin}$ bei $U_2 > U_1$ (Bild 124 links unten). Also eine klare Ja-Nein-Aussage für das Vergleichsergebnis. Zur Pegelanpassung, z.B. TTL-Digitaltechnik, kann eine Begrenzerschaltung aus Widerstand und Z-Diode nachgeschaltet oder in eine Gegenkopplung mit einbezogen werden [36].

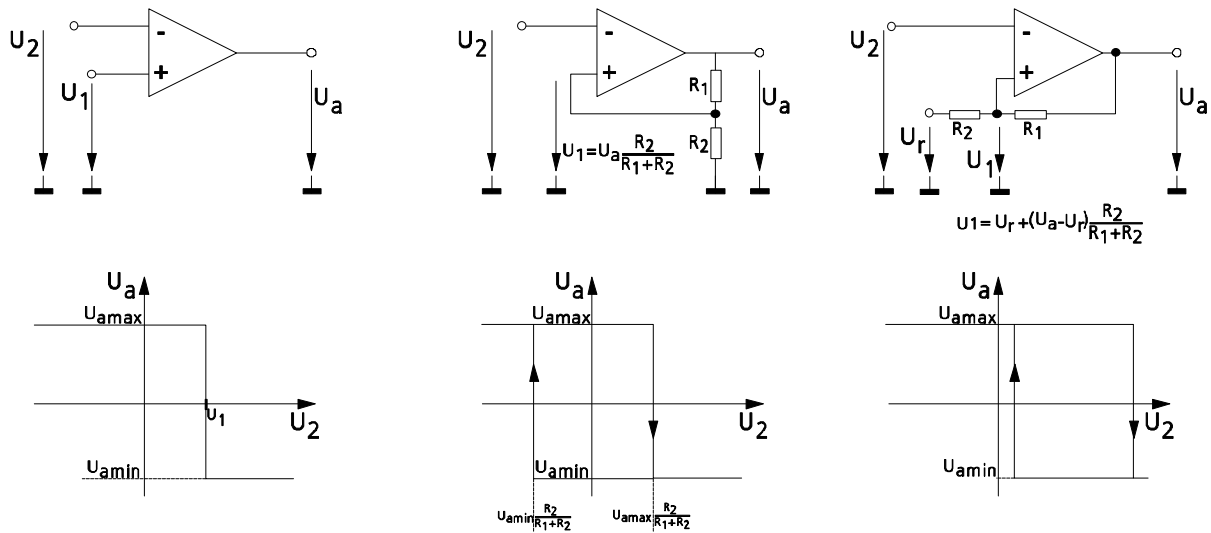


Bild 124: Komparatorschaltungen mittels Operationsverstärker. Links: einfacher Komparator; mitte: Komparator mit symmetrischer Schaltcharakteristik um den Nullpunkt und Hysterese; rechts: Komparator mit Hysterese und einstellbarer Schaltspannung.

Bei dem Vergleich ergibt sich unmittelbar um die Differenz $U_1-U_2=0$, also an der Umschaltflanke, eine undefiniertes Ausgangsverhalten. Hier spielen die realen Parameter des OpVs eine Rolle. Bei langsamem Durchlaufen, also z.B. bei langsam ansteigender Meßspannung, kann es zu Schwingungen am Ausgang des Operationsverstärker kommen. Diese rühren von kleinen Störspannungen im Meßsignal, die praktisch bei allen Anwendungen auftauchen. So z.B. überlagerte Wechsel- oder Rauschspannungen. Es stellt sich damit eine unklare Ja-Nein-Aussage ein.

Abhilfe schafft ein geringfügiges Verschieben des Vergleichswertes nach dem "Umschalten". Bild 124 mitte-oben zeigt einen solchen Komparator mit sog. Hysterese. Der eigentliche Schaltpunkt liegt bei $U_1=0V$. Durch die Rückführung (Mitkopplung!) des Ausgangssignales U_a über den Spannungsteiler R_1/R_2 wird U_1 gebildet und ist damit nicht Null, sondern, abhängig von dem Ausgangszustand und dem Teilverhältnis, geringfügig negativ oder positiv, wie in Bild 124 angegeben. Es stellt sich eine Hysterese Kennlinie nach Bild 124 mitte-unten ein. Ist $U_2 < 0$ liegt der Ausgang des OpVs auf U_{amax} . U_1 ist daher gemäß Spannungsteilerformel größer Null. Wächst U_2 an, dann erfolgt bei $U_2 > U_1$ das Umschalten und U_a wird negativ. Damit wird auch U_1 negativ und ein zurückspringen wird verhindert. Erst wenn U_2 das jetzt negative U_1 unterschreitet springt U_a wieder auf U_{amax} . Die Breite der Hysteresekurve läßt sich mit dem Spannungsteiler einstellen und ist so zu wählen, daß Störanteile der Meßspannung keine Umschaltung hervorrufen.

Bei Anwendungen, bei denen der Schaltvorgang nicht um den Vergleichswert Null erfolgen soll, kann die Schaltung gemäß Bild 124 rechts-oben erweitert werden. Der Fußpunkt des

Spannungsteilers ruht jetzt nicht mehr auf dem Bezugspotential, sondern auf dem Referenzpotential U_r . Das Schaltverhalten ergibt sich entsprechend der Angabe im Schaltbild, bzw. nach Bild 124 rechts-unten.

2.4.5.4 Digital-Analog-Wandler

In verschiedenen AD-Wandlern werden auch Digital-Analog-Umsetzer (DA-Wandler) eingesetzt. Deshalb wollen wir zuerst diese Wandlertypen besprechen. Es gibt verschiedene Varianten von DA-Wandlern [27][36], sie verfügen alle über n digitale Eingänge für den n stelligen Binärcode und einen, meist verstärkergetriebenen, analogen Ausgang für das Signal. Eine Bezugsspannung führt die "Renormierung" des digitalen Zahlenwertes durch, so daß sich wieder eine einheitenbehaftete Größe als Ausgangssignal einstellt. Dies ist die Umkehrung von Gl.(305).

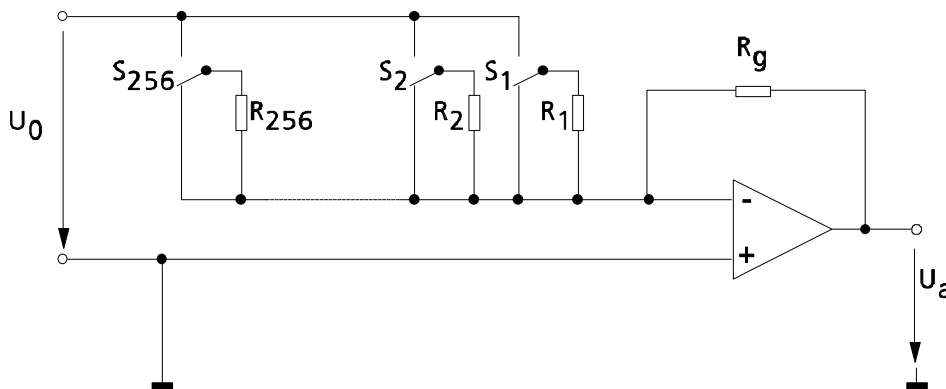


Bild 125: Digital-Analog-Wandler mit I-U-Verstärker

Eine Schaltungsvariante benutzt die invertierende Summiererschaltung (Bild 93) mit n speziell gestuften Eingangswiderständen. Die n Eingänge sind gemeinsam an die Bezugsspannung U_0 gelegt (Bild 125). U_0 ist vorzugsweise negativ zu wählen, damit sich am Ausgang eine positive Spannung einstellt. Die Ausgangsspannung stellt sich durch Stromgegenkopplung ein, weshalb die Schaltung auch DA-Wandler mit I-U-Verstärkung genannt wird. Werden die Schalter S_i durch die anliegende Zahl im Binärcode

$$Z_S = [s_{256} s_{128} s_{64} \dots s_2 s_1] \tag{308}$$

angesteuert, d.h. dem Dezimalwert

$$Z_{S_{\text{DEZIMAL}}} = s_{256} \cdot \underbrace{2^8}_{256} + s_{128} \cdot \underbrace{2^7}_{128} + \dots + s_1 \cdot \underbrace{2^0}_1 \tag{309}$$

und mit der Zuordnung logisch 1 entspricht Schalterposition oben und logisch 0 entspricht Schalterposition unten, dann gilt für die Ausgangsspannung

$$U_a = - R_g U_0 \left[s_1 \cdot \frac{1}{R_1} + s_2 \cdot \frac{1}{R_2} + \dots + s_{256} \cdot \frac{1}{R_{256}} \right]. \tag{310}$$

D.h. bei zu Gl.(309) passenden Gewichtungsfaktoren R_g/R_i erfolgt eine Umwandlung des digitalen Wertes. Wenn in diesem Beispiel die Bezugsspannung $U_0 = -1V$ beträgt und die Zahl [00000000] Null Volt bedeuten und [11111111] dem Wert 5 Volt entsprechen soll, dann ergibt sich mit

$$U_{amax} = 5V = -(-1V) \cdot R_g \cdot \sum \frac{1}{R_i} \Rightarrow 5 = R_g \cdot \sum \frac{1}{R_i} \Rightarrow \frac{5}{R_g} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (311)$$

die erste Dimensionierungsvorschrift für die Beschaltung. Aufgrund des Binärcodes (Dualzahl) muß außerdem gelten:

$$\begin{aligned} R_2 &= 2 \cdot R_1 \\ R_4 &= 2 \cdot R_2 = 4 \cdot R_1 \\ &\vdots \\ R_{256} &= 256 \cdot R_1 \end{aligned} \quad (312)$$

Damit erhalten wir aus Gl.(311)

$$\frac{1}{R_1} \cdot \left[\frac{1}{256} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{5}{R_g} \quad (313)$$

Die Schalter lassen sich leicht mittels Bipolar- oder Feldeffekttransistoren in Konstantstromquellenschaltung [36] oder, ähnlich wie bei der PSG-Schaltung nach Bild 115, mit FETs als elektronische Schalter aufbauen.

2.4.5.5 Flashconverter (Simultanumsetzer, Parallelumsetzer)

Eine AD-Wandlerschaltung, die sich direkt an die Komparatorschaltungen anlehnt ist der Simultanumsetzer. Er ist zugleich die derzeit schnellste Schaltung, was die Umwandlungszeit betrifft, allerdings - zumindest bei hoher Auflösung, d.h. hoher Stellenzahl - auch die schaltungstechnisch aufwendigste. Es werden so viel einzelne Komparatoren benötigt, wie Quantisierungsstufen-1 vorhanden sind, also bei n Bit 2^n-1 Komparatoren. (Bild 126).

Die n Vergleichsspannungen der n einzelnen Komparatoren werden aus einer Widerstandskette mit n Widerständen der Größe R abgegriffen. Die Vergleichsspannungen liegen an den N-Eingängen der als Komparatoren eingesetzten Operationsverstärkern an. Für die i-te Vergleichsspannung (Zählung von unten nach oben) gilt nach der Spannungsteilerformel:

$$U_{Vi} = U_0 \cdot \frac{\sum_{k=1}^i R}{\sum_{k=1}^n R} = U_0 \cdot \frac{i \cdot R}{n \cdot R} = U_0 \cdot \frac{i}{n} \quad (314)$$

Es werden damit alle Komparatorausgänge gleichzeitig - simultan - auf logisch 1 geschaltet, bei denen die Meßspannung U_x größer ist als deren Vergleichsspannung. Damit stellt sich am Ausgang der Komparatoren ein Code nach Tabelle 9 ein.

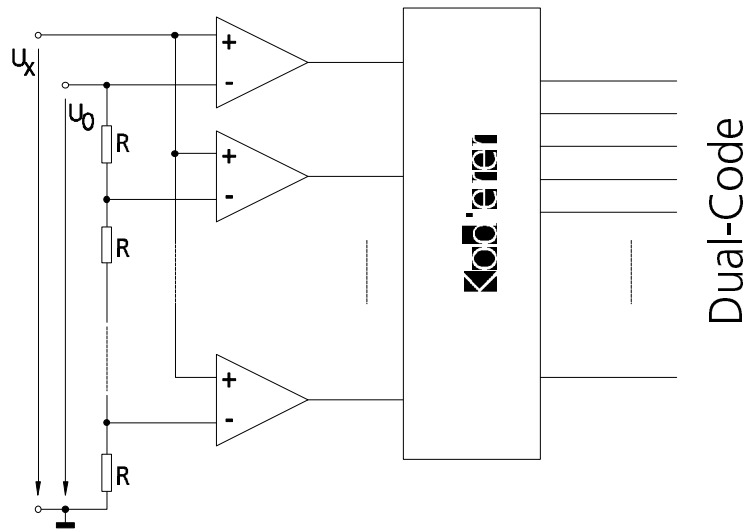


Bild 126: Analog-Digital-Wandler nach dem Simultanverfahren (Flash converter)

Stufe	Komparatoren					Dualcode					
	n	...	3	2	1	m	...	8	4	2	1
0	0		0	0	0	0		0	0	0	0
1	0	...	0	0	1	0	...	0	0	0	1
2	0		0	1	1	0		0	0	1	0
3	0		1	1	1	0		0	0	1	1
n ¹	1	...	1	1	1	1	...	1	1	1	1

¹ beim Binärcode stellt sich nur dann bei der Stufe n ein Code von [111..11] ein, wenn sich n als Potenz von 2^m ausdrücken läßt

Tabelle 9: Kodierungen beim Flashconverter (Simultanumsetzer) mit n=2^m Quantisierungsstufen. Die Stufe 0 benötigt keinen Komparator. Es sind 2ⁿ-1 Komparatoren erforderlich

Mittels eines Schaltnetzes (Kodierer) kann der Komparatorcode in den gewünschten Ausgabecode, z.B. Dualcode oder BCD-Code umgesetzt werden.

Typische Anwendungen dieses schnellen Wandlers mit Abtastraten von 100MS/s (MS/s=Mega-samples/Sekunde) und mehr: Digitalspeicheroszilloskope, Datalogger, Prozeßdatenverarbeitung. Typische Auflösungen sind 6..10 Bit.

2.4.5.6 AD-Wandler nach dem Dual-Slope-Verfahren

Dieser AD-Wandler-Typ benötigt relativ lange Umwandlungszeiten. Es lassen sich aber mit einfachen Schaltungen hohe Auflösung, d.h. hohe Stellenzahl erreichen. Die Besonderheit der Schaltung gewährleistet auch eine hohe Stabilität der Lage der Quantisierungsstufen.

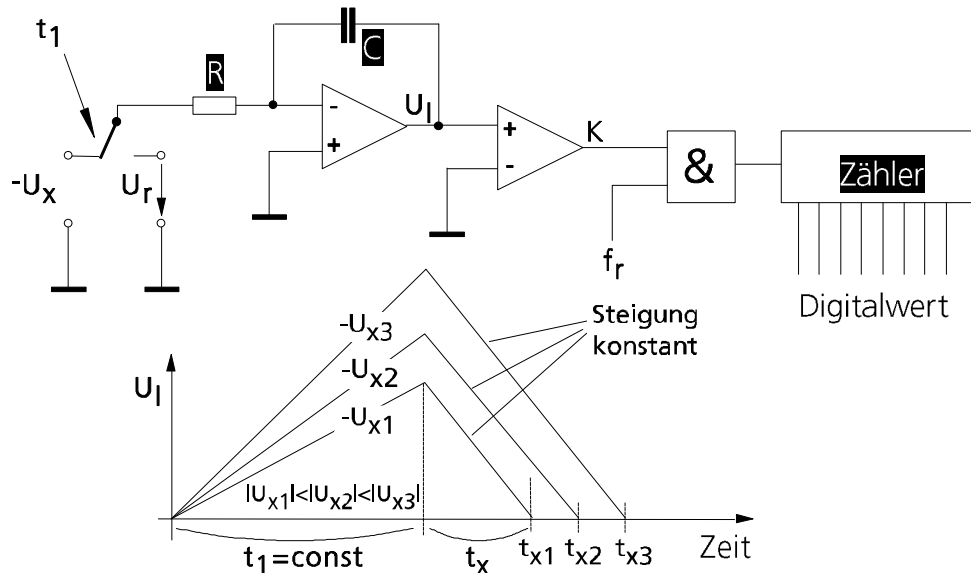


Bild 127: Analog-Digital-Wandler nach dem Dual-Slope-Verfahren

Die Grundidee ist, mit der gleichen Einrichtung eine Referenzspannung und die Meßspannung zu bewerten und zu vergleichen. Das Grundprinzip "Messen heißt vergleichen" kennzeichnet dieses Verfahren besonders stark. Vom Prinzip her ist es ein selbstkalibrierendes Verfahren, das auch die hohe Langzeit- und Temperaturstabilität begründet. Erkauft wird das Verhalten durch eine lange Umwandelzeit (typ. bis 1s und mehr).

Das Prinzip ist aus der Schaltung nach Bild 127 oben zu ersehen [28]. Kernstück ist ein invertierender Integrierer, der abwechselnd die durch das Abtast-Halteglied konstant gehaltene Meßspannung $-U_x$ und die ebenfalls konstante Referenzspannung U_r aufintegriert, so daß sich zwei Rampen (Bild 127 unten) ergeben. Deshalb wird das Verfahren als Dual-Slope oder Zweirampenverfahren bezeichnet. Die Messung läuft in drei Schritten ab:

1. Der Integrierer wird auf Null gesetzt, d.h. der Kondensator C wird völlig entladen.
2. Die negative Meßspannung $-U_x$ wird mittels des Wechselschalters für die konstante Zeitdauer t_1 an den Integriereeingang gelegt, der die Spannung mit der Zeitkonstante RC aufintegriert. Nach der Zeit t_1 ist eine bestimmte Spannung (=Endwert der ersten Rampe) am Integriererausgang erreicht.
3. Nach t_1 wird der Wechselschalter schlagartig umgelegt, so daß die konstante Referenzspannung U_r , mit entgegengesetztem Vorzeichen zu U_x , am Integriereeingang liegt. Die Folge ist ein Abwärtsintegrieren. Gleichzeitig werden die Zählimpulse der Referenzfrequenz f_r angelegt. Der Zähler beginnt von 0 an zu zählen. Mit dem nachgeschalteten Komparator K wird geprüft, ob die Ausgangsspannung 0 erreicht wurde, was nach t_x der Fall ist. Der Komparator schaltet die Zählimpulse dann ab, der Zählerstand lautet dann N_x .

Formal läßt sich der Vorgang folgendermaßen beschreiben: Die Ausgangsspannung am Integrierer beträgt nach t_1 (Endwert nach 2. Schritt)

$$u_I(t_1) = \frac{1}{RC} \int_0^{t_1} U_X dt = \frac{U_X}{RC} t_1. \quad (315)$$

Nach der Zeit t_1+t_x beträgt die Ausgangsspannung wieder 0:

$$u_I(t_1 + t_x) = u_I(t_1) - \frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_1+t_x} U_r dt = 0. \quad (316)$$

Werten wir das Integral aus und fassen Gl.(315) und Gl.(316) zusammen, dann ergibt sich

$$t_x = t_1 \cdot \frac{U_X}{U_r}. \quad (317)$$

Über einen digitalen Teiler - ein zyklischer Zähler der Länge N_1 - wird aus der Referenzfrequenz f_r (Bild 127) die Zeit t_1 abgeleitet:

$$t_1 = \frac{N_1}{f_r}. \quad (318)$$

Mit dem Zählerstand

$$N_X = f_r \cdot t_x = f_r \cdot t_1 \cdot \frac{U_X}{U_r} = f_r \cdot \frac{N_1}{f_r} \cdot \frac{U_X}{U_r} = N_1 \cdot \frac{U_X}{U_r}, \quad (319)$$

der nach N_x Takten verfügbar ist, läßt sich die unbekannte Meßspannung errechnen

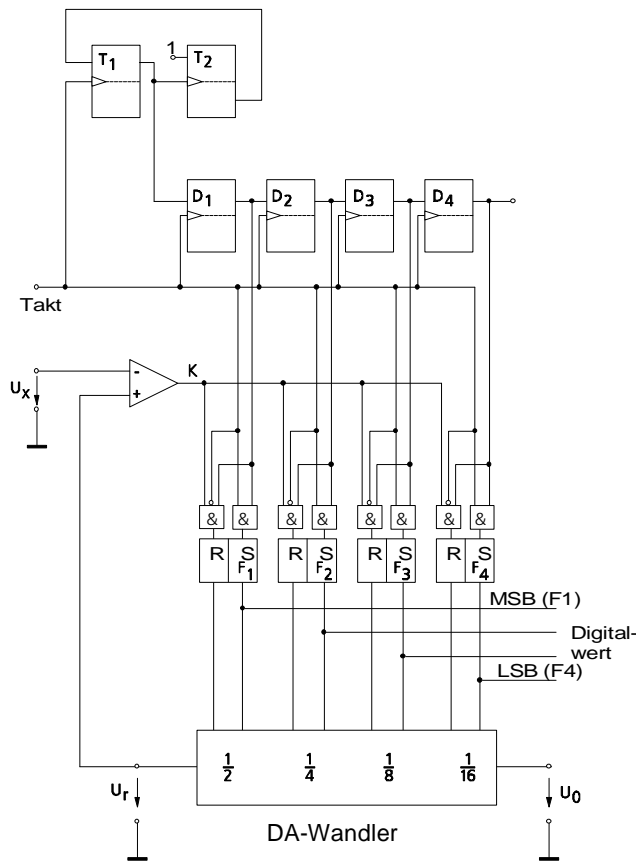
$$U_X = \underbrace{\frac{U_r}{N_1}}_{\text{konstanter Faktor}} \cdot \underbrace{N_X}_{\text{Anzeigewert}}. \quad (320)$$

Der angezeigte Wert ist unabhängig von RC und der Referenzfrequenz f_r . Der Wandler zeichnet sich deshalb, wie bereits erwähnt, als sehr langzeit- und temperaturstabil aus. Die Referenzspannung U_r geht aber in das Meßergebnis unmittelbar ein. Analoge Integrierer lassen sich mit hoher Qualität aufbauen, weshalb auch die Wandlerkennlinie eine hohe Linearität aufweist.

Typische Anwendungsfälle dieses langsamen, aber hoch auflösenden Wandlers: Für Meßgeräte, die vom Menschen abgelesen werden (Voltmeter) und Meßwandler kleiner Meßunsicherheit und hoher Auflösung. Typische Auflösung: 10..14 Bit, z.T. mehr.

2.4.5.7 AD-Wandler nach dem Wägewerfahren

Von der Geschwindigkeit liegt dieser Wandler zwischen dem Flashconverter und dem Dual-Slope-Verfahren. Er benötigt für 2^n Quantisierungsstufen n Takte zur Wandlung. Das Verfahren wird auch schrittweise Annäherung oder sukzessive Approximation genannt.



Beispiel: 4 Stufen, $U_x=6,3V$ bei $U_0=16V$

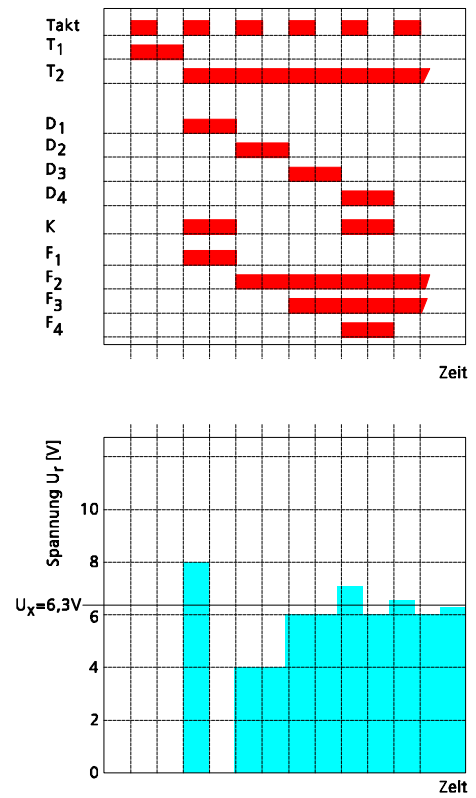


Bild 128: Analog-Digital-Wandler mit sukzessiver Approximation (Wägeverfahren)

Seine Arbeitsweise gleicht dem Wägevorgang auf einer Balkenwaage. Betrachten wir das Wägen genauer. Eine Balkenwaage mit zwei Waagschalen für die unbekannte Masse und Vergleichsgewichtstücke ist durch auflegen oder entfernen der Gewichte auszubalancieren. Es stehen Gewichtstücke unterschiedlichen Gewichts zur Verfügung. Vom schwersten zum leichtesten betrachtet sei ein Gewichtsstück stets genau halb so schwer wie das vorhergehende. Wir beginnen das Ausbalancieren mit dem schwerste Stück. Liegt die Masseschale unten, belassen wir das Gewichtsstück in der Schale. Senkt sich allerdings die Vergleichsschale, wird das Gewichtsstück wieder entfernt. Danach wird das nächste, halb so schwere Stück aufgelegt und der gleichen Prozedur ausgesetzt. Diesen Vorgang führen wir solange fort, bis auch das leichteste Gewichtsstück einmal auf der Waagschale war oder noch ist. Das Ergebnis ergibt sich aus der Summe der bekannten Vergleichsgewichtsstücke.

Der selbe Vorgang läuft im AD-Wandler nach dem Wägeverfahren ab. Die unbekannte Masse entspricht der unbekanntem Spannung U_x , die Vergleichsgewichtsstücke sind Spannungsteile, die in der Summe U_r ergeben (Bild 128). Wir betrachten ein Beispielwandler mit vier Bit. Die D-Flip-Flops $T_1, T_2, D_1, \dots, D_4$ sind mit positiver Flanke getriggert. T_1 und T_2 erzeugen ein Steuersignal, das die einzelnen "Wägevorgänge" steuert. Es wird ein kurzer Zeitbalken erzeugt, der nacheinander die 4 D-Flip-Flops D_1, \dots, D_4 durchläuft (Bild 128 rechts oben). Das "Auflegen" eines Gewichtes entspricht hier dem Setzen der RS-Flip-Flops F_1, \dots, F_4 . Das Vergleichsgewicht insgesamt wird als Spannung U_r durch den DA-Wandler aus dem anliegenden Dualcode $F_1 \dots F_4$ (MSB..LSB) gebildet.

Zunächst sind aber alle RS-Flip-Flops zurückgesetzt. Der DA-Wandler gibt $U_r=0V$ aus. Der Zeitbalken aus T_1 - nachfolgend Steuerbalken genannt - setzt das Flip-Flop D_1 . F_1 wird gesetzt

und damit der größte Spannungsteil ausgegeben: $U_r = U_0/2$. Der Komparator K vergleicht, ob die "Wägung ausbalanciert" ist, d.h. ob $U_r > U_x$ ist. Wenn dies der Fall ist, also der Spannungsteil zu groß ist, wird mit fallender Taktflanke das RS-Flip-Flop F_1 wieder zurückgesetzt. Wenn der Spannungsteil $U_0/2$ zum "ausbalancieren" noch nicht ausreicht, also U_r zu klein und damit das Komparatorsignal 0 ist, bleibt F_1 gesetzt. Hier im Beispiel (Bild 128 rechts) mit $U_0 = 16V$ und $U_x = 6,3V$ ist der erste Spannungsteil zu groß. Bei der nächsten positiven Taktflanke wandert der Steuerbalken zu D_2 , setzt F_2 und legt damit $U_0/4$ zusätzlich auf U_r . Der Komparator vergleicht wieder und beläßt hier das RS-Flip-Flop F_2 gesetzt. Der Vorgang läuft so weiter, bis der Steuerbalken das letzte D-Flip-Flop passiert hat. Dann ist die Messung abgeschlossen und der Dualcode des Meßwertes ist an den Flip-Flops $F_1 \dots F_4$ ablesbar.

Zum einen ist hier die schrittweise Annäherung an das Endergebnis, von zunächst groben Schritten zu immer feineren zu sehen (sukzessive Approximation). Zum anderen wird auch hier wieder das Vergleichen als Messen sehr deutlich.

Typische Anwendungsfälle dieser Wandler: mäßig schnelle, aber relativ hochauflösende Datenerfassung. Typische Auflösung: 8..12 Bit, z.T. mehr.

2.4.6 Oszilloskope

Lernziel: Braunsche Röhre, Bilddarstellung, Signalablenkung, Triggerung, Bedienelemente, Speicheroszilloskop, DSO, Anwendungen

Periodische und transiente Spannungssignale lassen sich mit den bisher beschriebenen Verfahren nur eingeschränkt messen. Mit der Ausnahme der Schreiber oder AD-Wandler mit nachgeordnetem Speicher, die den tatsächlichen Verlauf registrieren und dann eine Auswertung zulassen.

Speziell die Schreiber erlauben aber nur das Registrieren niederfrequenter Signale. Bei sich rasch ändernden Verläufen scheidet das mechanische Schreiberverfahren aus. Hier ist das Einsatzgebiet der Oszilloskope (= "Schwingungsanzeiger"), auch - nicht korrekter Weise - Oszillograph (= "Schwingungsschreiber") genannt. Wir unterteilen die Oszilloskope in analoge, mehr dem mechanischen Schreiber ähnelnd und digitale, die das AD-Wandler-Speicher-Konzept mit nachgeschalteter Anzeige benutzen.

Da die Anzeige bei hochfrequenten Signalen entsprechend schnell sein muß, werden i.d.R. Elektronenstrahlröhren (Oszillographenröhren) benutzt. Diese werden bei analogen Oszilloskopen ebenso eingesetzt, wie bei digitalen, aber unterscheiden sich dabei in der Ansteuerung.

2.4.6.1 Oszillographenröhre

Die Oszillographenröhre ist eine besondere Form der Braun'schen Röhre. Sie dient dazu, einen flüchtigen Lichtpunkt, oder eine flüchtige Lichtspur auf einen Beobachtungsschirm zu schreiben.

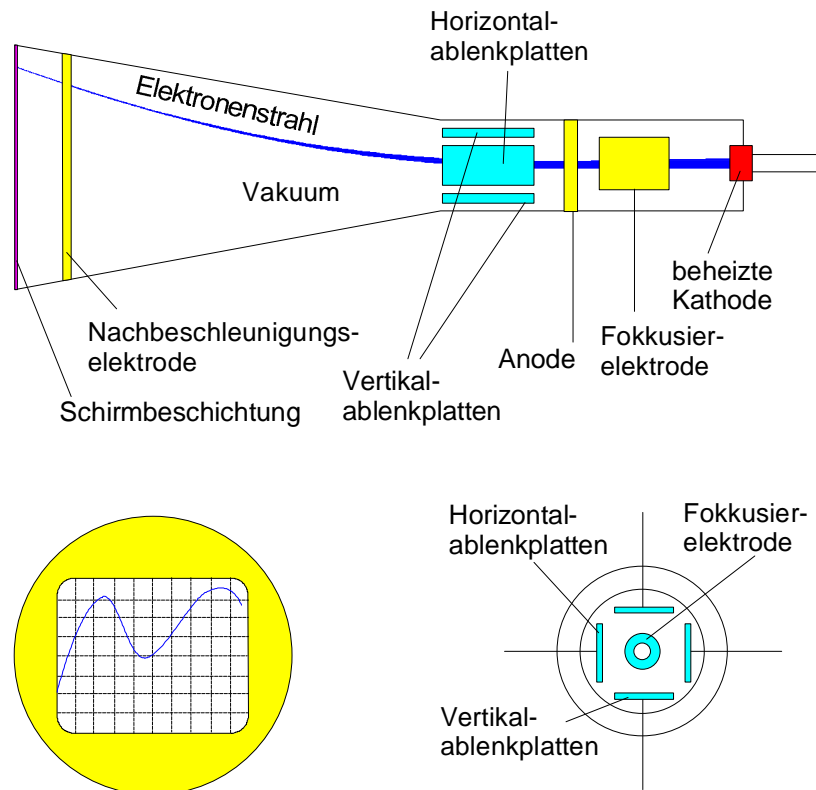


Bild 129: Oszillographenröhre (Braunsche Röhre) im Längsschnitt (oben), Schirmbildansicht (unten links) und Querschnitt bei den Ablenkplatten (unten rechts)

Sie besteht aus einem hochevakuierten Glasefäß (Bild 129 oben), welches an der Schirmseite (links) aufgeweitet ist. Der Schirm (Bild 129 unten links) trägt auf der Innenseite eine Beschichtung, die bei Beschuß mit Elektronen zu leuchten beginnt. Trifft ein Elektronenstrahl kontinuierlich auf einen engen Bereich (Punkt) dann entsteht ein Leuchtfleck, dessen Intensität von der Energie des Elektronenstrahls abhängt. Wird der Strahl ausgesetzt, dann leuchtet der Fleck nur kurz nach und verblaßt wieder.

Dieser Effekt läßt sich zum "Schreiben" einer Leuchtspur benutzen, wenn der Elektronenstrahl über den Schirm geführt wird. Es entsteht dann eine flüchtige Leuchtspur wie in Bild 129 links unten. Soll ein bleibendes Bild erzeugt werden, dann muß die selbe Spur stets aufs Neue überschrieben und damit zum Leuchten angeregt werden.

Der Elektronenstrahl kann nun aufgrund seiner negativen elektrischen Ladung mittels elektrischer Felder⁶ in seiner Bahn beeinflußt werden. In Bild 129 oben bewegen sich die zu dem Strahl gebündelten Elektronen von rechts nach links. Sie werden von der beheizten Kathode emittiert und von im hohen elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode beschleunigt. Die Fokkusierelektrode bündelt die "losen" Elektronen. Der so gebildete Strahl passiert die vier Ablenkplatten (Ablenkelektroden) für - bezogen auf den Schirm - die horizontale (x-Richtung) und vertikale (y-Richtung) Ablenkung (Bild 129 unten rechts). Tragen die Elektroden kein Potential, trifft der Strahl auf die Schirmmitte. Abhängig vom aufgebauten Feld zwischen den Platten wird dann der Strahl abgelenkt.

⁶ Die Braun'sche Röhre wird auch als Fernseh- oder Terminalmonitorröhre eingesetzt. Dort erfolgt die Ablenkung über Magnetfelder, die von Ablenkspulen erzeugt wurden.

Über zusätzliche Steuerelektroden läßt sich der Strahl in seiner Intensität - quasi in z-Richtung - steuern. Damit lassen sich nicht nur die Helligkeit und Nachleuchtdauer einstellen, es können auch hierüber Informationen auf den Bildschirm gebracht werden (Marker, Pixel).

2.4.6.2 Analoges Oszilloskop

Beim analogen Oszilloskop erfolgt die Aufzeichnung im Prinzip ganz ähnlich, wie beim mechanischen Schreiber (Bild 81), wobei eine Oszillographenröhre benutzt wird. Allerdings ist hier die Schreibfläche (Schirm) ortsfest und der Schreiber (Elektronenstrahl) beweglich. Die horizontale Ablenkung (x-Richtung) wird üblicherweise über eine Zeitrampe vorgenommen und die vertikale Ablenkung (y-Richtung) vom - ggf. verstärkten und nullpunktbereinigten - Meßsignal.

Beginnt die Aufzeichnung, dann sei der Leuchtpunkt zunächst am linken Schirmrand. Dies könnte durch eine negative Horizontalspannung (= Elektrodenspannung der horizontalen Ablenkplatten) hervorgerufen sein. Mit linear anwachsender Spannung (zeitliche Rampe) wandert der Leuchtpunkt kontinuierlich mit konstanter x-Geschwindigkeit zum rechten Schirmrand. Jeder Veränderung der Vertikalspannung, hervorgerufen durch die mittels Verstärker angepaßte Meßspannung, lenkt den Leuchtpunkt ähnlich dem mechanischen Schreibstift aus, so daß sich eine Leuchtspur analog zum zeitlichen Signalverlauf ergibt. Wenn der rechte Schirmrand erreicht ist, kann die Aufzeichnung von Neuem beginnen.

Die Horizontalspannung muß also einem Sägezahnverlauf folgen. Nehmen wir zunächst eine periodische Meßspannung an. Wenn die Periodenlänge des Sägezahns genau die jeweils ansteigende Rampe umfaßt, dann ergibt sich das Problem, daß die Frequenz der Horizontalspannung mit der (unbekannten) Frequenz des Meßsignals synchronisiert werden muß. Ist dies nicht der Fall, wird der neue Schrieb nicht in die Spur des alten Schriebes gelegt und es stellt sich kein "stehendes" Bild auf dem Schirm ein - das Bild "läuft".

Dieses Problem wird durch eine Triggerschaltung gelöst. Sie steuert den Beginn der Zeitrampe abhängig vom Meßsignal (Vertikalspannung), so daß die sich wiederholenden Schriebe bei periodischen Meßsignalen deckungsgleich übereinander liegen.

Bild 130 zeigt die Signalverläufe eines Meßsignals und dazu gehörender Horizontalablenkung. Zunächst wartet der Leuchtpunkt am linken Rand. D.h. die Horizontalspannung ist negativ (Punkte 1..2). Durchschreitet das Meßsignal den Startpegel (Triggerpegel) mit der vorgegebenen Flanke (Steigend oder fallend) löst der Trigger (engl.: Auslöser, Abzug bei Feuerwaffen) die Horizontalablenkung aus (Punkte 2..3) - die Registrierung auf dem Schirm beginnt.

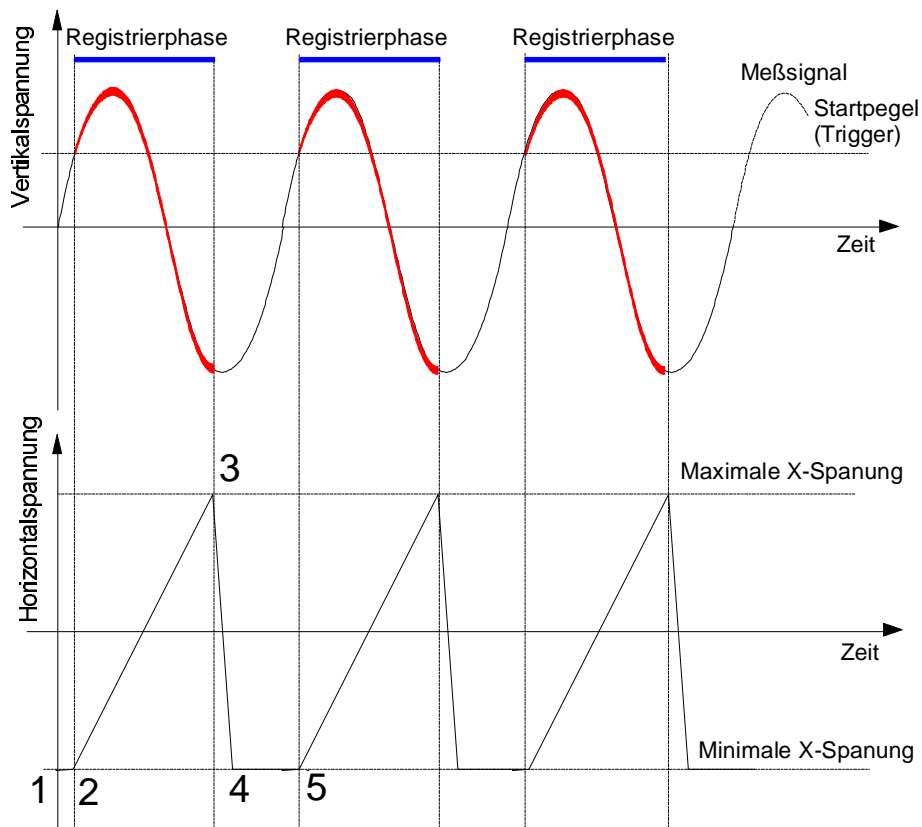


Bild 130: Wiederholtes Aufzeichnen eines Ausschnittes eines periodischen Schwingungssignals an der Vertikalablenkung (oben). Die Zeitbalken kennzeichnen den Ausschnitt, der die gesamte Schirmbreite des Oszilloskops einnimmt. Steuerspannung der Horizontalablenkung (unten).

Die Steilheit der Zeitrampe (2..3) legt den Maßstab der x-Achse (Zeitmaßstab, Zeitbasis) fest. Nach erfolgter Aufzeichnung läuft der Strahl zu seinem Ausgangspunkt am linken Schirmrand zurück (Punkte 3..4). Er wird dabei ausgeblendet (Dunkelsteuerung) um eine Rücklaufspur zu vermeiden. Danach wird die Triggerung wieder aktiviert und sobald die Triggerbedingungen (Pegel und Flanke) vom Signal erneut erfüllt werden, wieder die Rampe gestartet (Punkte 4..5). Bei periodischen Signalen ergeben sich damit identische Verläufe der Schriebe während der Registrierphasen (Bild 130).

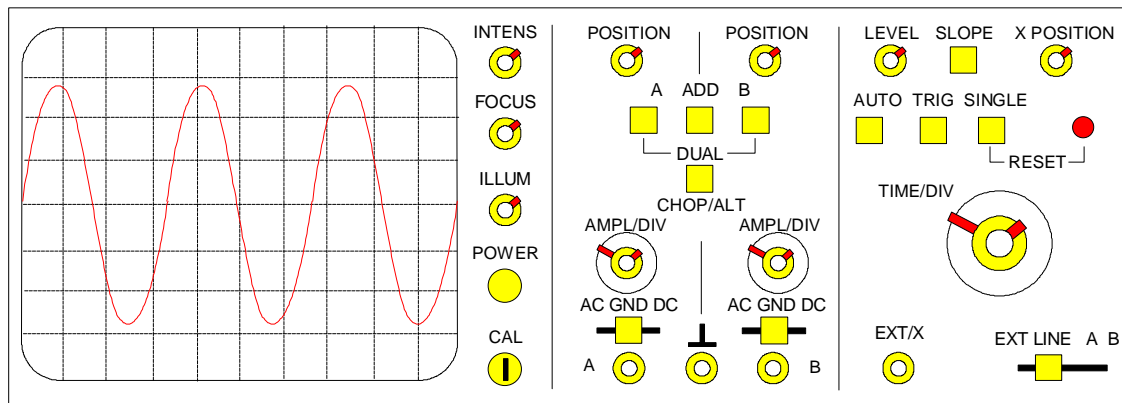
Bei einem analogen Oszilloskop finden wir dementsprechend Bedienelemente für die o.a. Steuerungen der Oszillographenröhre. Ein Beispiel für eine Frontplatte mit Bedienelementen zeigt Bild 131 (in Anlehnung an Philips). Die Frontplatte ist in drei Bereiche unterteilt:

1. links: der Bildschirm mit den Schirmeinstellungen
2. mitte: Einstellungen für die Vertikalauslenkung (Meßsignal)
3. rechts: Einstellungen für die Horizontalablenkung (Zeitbasis, Trigger)

Die Bedienelemente des Beispiels weisen folgende Funktionen auf (von links nach rechts):

INTENS Intensity: Intensität des Elektronenstrahls, beeinflusst Spurintensität und - in Grenzen - Nachleuchtdauer

- FOCUS** Fokkussierung, "Strahschärfe", Spurschärfe
- ILLUM** Illumination: Bildschirmbeleuchtung, das Rasternetz wird erhellt
- POWER** Ein/Ausschalter für die Stromversorgung
- CAL** Calibration: Kontaktzunge mit Referenzsignal für den Tastkopfabgleich (siehe Kalibrierung des Tastkopfs)



Geräteeinstellungen

Verstärker für
Vertikalablenkung

Einstellungen für
Horizontalablenkung

- Anschlußbuchsen in Koaxialbauweise
- Tasten mit zwei Schaltstellungen
- Schiebeschalter
- Drehknopf für kontinuierliche Einstellung
- Drehknopf mit Rastpositionen

Bild 131: Frontplattenbeispiel mit Bedienelementen eines analogen Oszilloskops.

Der Bereich Vertikalablenkung ist in zwei Bereiche geteilt, links für Kanal A, rechts für Kanal B. Das Beispieloszilloskop verfügt über zwei Kanäle, es können also zwei getrennte Signale auf dem Schirm dargestellt werden. Dies ist besonders vorteilhaft, wenn zwei Signale miteinander verglichen werden sollen.

- POSITION** Nullpunktseinstellung für Kanal A und Kanal B (getrennt)
- A** Einschalten von Kanal A
- B** Einschalten von Kanal B
- ADD** Addition: es wird nur ein Signal, die Addition aus Kanal A und Kanal B, angezeigt
- CHOP/ALT** Umschalter für Chopper- und Alternate-Betrieb. Dieses Oszilloskop-Beispiel besitzt eine Oszillographenröhre mit nur einem Elektronenstrahl und einer Ablenkeinheit. Die beiden Kanäle müssen

daher abwechselnd bedient werden (Multiplexbetrieb), wobei zwei grundsätzliche Verfahren unterschieden werden:

Alternate: Die beiden Kanäle werden abwechselnd vollständig aufgezeichnet. D.h. zuerst wird Kanal A auf dem Schirm aufgezeichnet, beim nächsten Durchlauf wird Kanal B aufgezeichnet, danach wieder A, usf. Bei langsamer Horizontalablenkung ist kein Vergleich möglich, da immer nur ein Signal zu sehen ist.

Chopper: Bei langsamer Horizontalablenkung ist der Chopperbetrieb vorzuziehen. Hier wird während eines Strahldurchlaufs mehrfach zwischen Kanal A und B umgeschaltet. Bei schneller Horizontalablenkung sind die Umschaltlücken zu sehen, d.h. es fehlt immer genau das Stück der Signaldarstellung, wo zur gleichen Zeit der andere Kanal bedient wird.

AMPL/DIV Amplification/Division: Getrennte stufige Einstellung der Verstärkungsfaktoren der Meßverstärker von Kanal A und B. Ein jeweils zweiter, kleinerer, coaxial angebrachte Drehknopf läßt ein kontinuierliches einstellen zu und weist eine Raststellung mit einem kalibrierten Verstärkungsfaktor (CALIB) auf. Die Verstärkungsfaktoren werden in Volt/Division, d.h. Volt pro Bildschirmraster oder Volt/cm angegeben.

AC/GND/DC Schiebeschalter je Kanal mit drei Rastungen, der den Verstärkereingang mit GND=0V, AC- oder DC-gekoppeltem Signal belegt. DC bedeutet direkte Kopplung, AC bedeutet, daß der Gleichanteil durch Hochpaßfilterung unterdrückt wird und GND ist das Bezugspotential (0V) für die Meßspannung. GND kann eingestellt werden, um mittels POSITION die Nulllinie einzustellen.

⊥ Buchse für zusätzliche Gerätemasse

A, B Zweipolige Anschlußbuchsen in Koaxialbauweise, z.B. 50Ω, für die Meßsignale

Der Bereich der Horizontalablenkung enthält die Bedienelemente für die Triggerung und die Zeitbasis:

LEVEL Drehknopf für den Triggerpegel

SLOPE Umschalttaste für positive oder negative Triggerflanke

AUTO Normaler Triggermodus für wiederholtes Triggern

TRIG Einzeltriggermodus, es wird nur ein einziger Triggerimpuls ausgelöst

SINGLE Taste zur Bereitschaltung des Triggers. Nach drücken der Taste leuchtet die Anzeige RESET bis der Trigger ausgelöst hat

RESET siehe SINGLE

X-POSITION Horizontale Positionierung

TIME/DIV Stufenschalter für die Zeitbasis. Die Einstellung erfolgt in Mikrosekunden..Sekunden/Division (Bildschirmraster) oder Mikrosekunden..Sekunden/cm. Eine Rastposition schaltet die Zeitbasis aus (0s/DIV), eine weitere schaltet auf externe x-Ablenkung. Wie der Schalter AMPL/DIV ist auch hier ein koaxial angeordneter zweiter Drehknopf für kalibrierte oder unkalibrierte, aber kontinuierliche Verstellung.

EXT/X Koaxialanschlußbuchse für externes Triggersignal oder externe x-Ablenkung

EXT/LINE/A/B Schiebeschalter zur Auswahl der Triggerquelle, d.h. welches Signal den Trigger auslöst: EXT: externes Signal, LINE: Netzfrequenz (Anwendung in der Videotechnik), A: Kanal A, B: Kanal B

Zusätzlich zu diesen Anschlüssen ist bei vielen Oszilloskopen auf der Rückseite eine Anschlußbuchse für die externe Intensitätssteuerung des Strahls (Z-Modulation).

Neben dem hier beschriebenen Oszilloskop-Beispiel gibt es eine ganze Reihe von Sonderbauformen analoger Oszilloskope.

Ein wichtiger Typ ist das echte Zweistrahloszilloskop. Hier ist die Röhre mit zwei getrennten Elektronenkanonen inklusive Ablenkung ausgerüstet, die auf einen gemeinsamen Schirm strahlen. Es können damit zwei Signale absolut zeitgleich - ohne Unterscheidung von Chopper- oder Alternate-Modus - aufgenommen werden.

Ein weiterer wichtiger Typ ist das analoge Speicheroszilloskop. Es verfügt über einen Schirm mit zuschaltbarer, ausgeprägter Nachleuchtdauer. Es bleiben Leuchtspuren zumindest einige Minuten erhalten, so daß transiente Signale aufgezeichnet werden können. Der Schirm kann mittels manueller Auslösung elektrisch gelöscht werden.

Weitere Bauformen finden sich in [28] und [32].

2.4.6.3 Digitales Oszilloskop

Beim digitalen Oszilloskop wird das Meßsignal mittels AD-wandler in digitale Abtastwerte umgewandelt, zwischengespeichert und dann auf einem Bildschirm ausgegeben. Wir können die Struktur eines solchen digitalen Speicheroszilloskops (DSO) in drei quasi unabhängige Funktionsblöcke unterteilen: Meßwertaufnahme, Speicher und Meßwertausgabe (Bild 132).

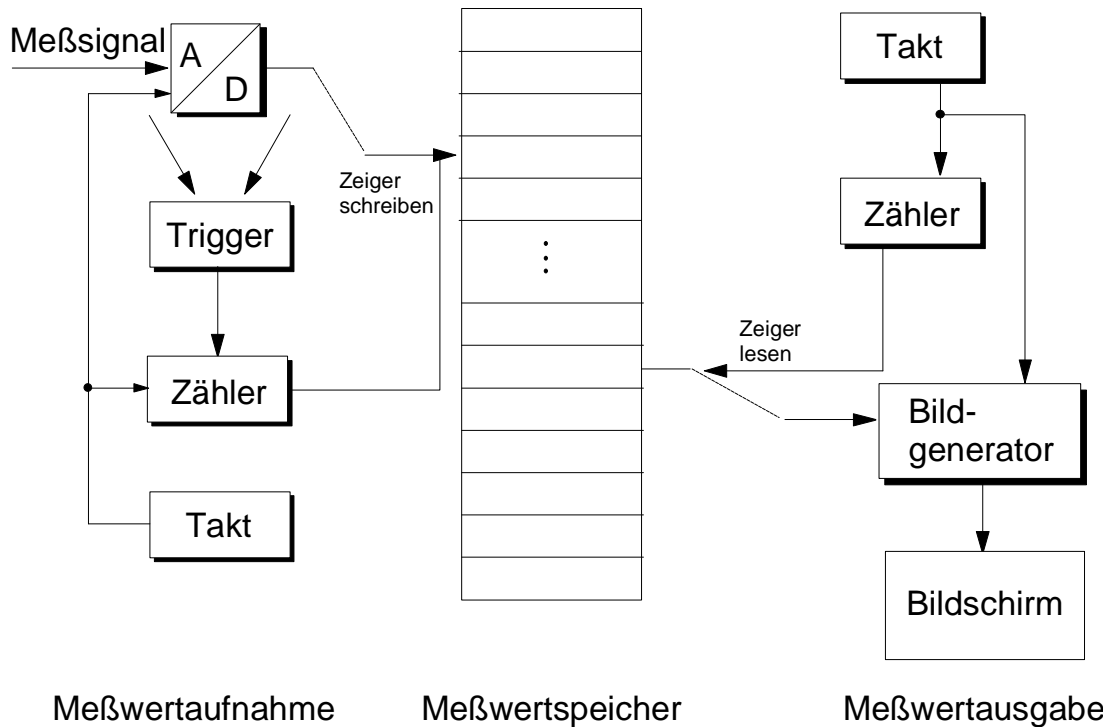


Bild 132: Struktur eines digitalen Speicheroszilloskops

Die Meßwertaufnahme erfolgt über einen AD-Wandler. Ein Zähler erzeugt binäre Adressen in aufsteigender Reihenfolge als Zeiger auf Speicherplätze, so daß die gewandelten Meßwerte der Reihe nach in einem schnellen Meßwertespeicher abgelegt werden. Der Beginn der Messung wird hier - ebenso wie beim analogen Oszilloskop - über eine Triggereinrichtung festgelegt. Diese kann rein analog arbeiten, oder, nach dem selben Prinzip, digital mittels der gewandelten Meßwerte. Der Speicher wird zyklisch gefüllt, d.h. nach dem in die letzte Speicherstelle geschrieben wurde, wird nach erneuter Triggerung, wieder mit dem ersten Speicherplatz begonnen. Mittels der Taktfrequenz wird die Zeitbasis festgelegt.

Die Meßwertausgabe arbeitet unabhängig davon und dient der Visualisierung. Ein zweiter Zähler zeigt der Reihe nach und zyklisch auf die Speicherstellen. Die Meßwerte werden ausgelesen und einem Bildgenerator zugeführt, der die Werte graphisch anzeigt. Der Takt beim Auslesen richtet sich nach dem Bildgenerator mit Bildschirm.

Hier können zwei verschiedene Visualisierungsverfahren angewendet werden:

- Analoge Ausgabe: Die zyklisch ausgelesenen Meßwerte werden DA-gewandelt und als analoges Signal einem analogen Oszilloskop zugeführt. Dessen Trigger wird über den Auslezähler gesteuert. An die Geschwindigkeit des analogen Scopes sind nur sehr geringe Anforderungen gestellt, da das Auslesen langsam erfolgen kann. Der Bildgenerator (DA-Wandler) ist sehr einfach aufzubauen. Transiente Meßsignale können durch das zyklische Auslesen periodisiert werden, wodurch sich auf dem Schirm ein "stehendes Bild" einstellt. Die Ausgabe kann auch über xy-Schreiber erfolgen, so daß ein echter, nichtflüchtiger Schrieb entsteht.
- Digitale Ausgabe / Videosignal: Ähnlich wie bei Rechnermonitore setzt der Bildgenerator die Zahlenwerte in eine Pixelmatrix um (vgl. auch Bild 46) die in

einem Pixelspeicher (Bildpunktespeicher) abgelegt wird. Dort können die Bildpunkte zeilenweise ausgelesen und auf einen Videoschirm oder andere Pixelschirme (LCD, LED) angezeigt werden. Bei dieser Technik können Zusatzinformationen wie Cursor, Zahlenwerte, Beschriftungen usw. leicht mit im Bild eingeblendet werden. Das Verfahren läßt auch das Ausdrucken auf Matrixdrucker - ebenfalls bildpunkteorientiert - zu (sog. hardcopy).

DSO haben auch den Vorteil, daß die abgespeicherten Meßwerte leicht auf andere Speichermedien, wie z.B. Floppy Disks, und auch über Kommunikationsschnittstellen (interface) auf andere Systeme, wie z.B. Rechner, übertragbar sind.

Das Meßsignal muß auch hier vorverstärkt werden. Der Verstärkerteil ist ähnlich aufgebaut wie bei den analogen Oszilloskopen. Bei Mehrkanaloszilloskopen lassen sich auch hier echte Mehrkanalsysteme mit n mal AD-Wandler und Speicher sowie Multiplexsysteme (siehe auch AD-Wandlung, Abtastglieder) unterscheiden.

2.4.6.4 Anwendungen

Tastköpfe

Oszilloskope dienen der Visualisierung (Sichtbarmachung) von periodischen oder transienten (einmaligen) Spannungssignalen. Typischerweise umfaßt der Meßbereich $-20..+20V$. Bei größeren Spannungen muß das Meßsignal mittels Spannungsteiler verringert werden. Aufgrund der möglichen hohen Signalfrequenzen sind an solche Spannungsteiler hohe Forderungen bezüglich ihres Übertragungsverhaltens gestellt.

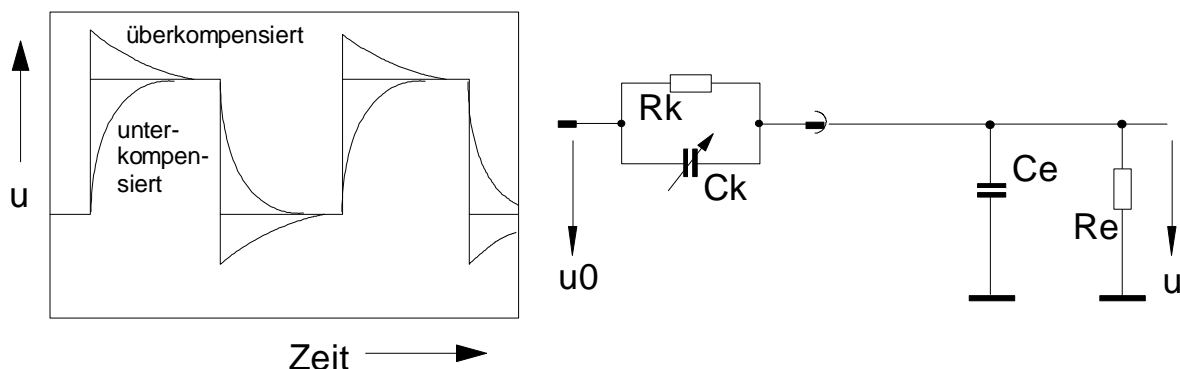


Bild 133: Kompensation der Eingangskapazität mittels Kondensator mit veränderlicher Kapazität.

Die Spannungsteiler lassen sich mit den ohnehin vorhandenen Verstärkereingangswiderständen - genauer Eingangsimpedanzen C_e parallel R_e - (Bild 133rechts) aufbauen. Um das resultierende Meßsignal u nicht zu verschleifen (Tiefpaßcharakteristik), wird der Teiler mit R_k parallel C_k ergänzt. Da die Widerstände und Kondensatoren mit Toleranzen behaftet sind und eine unverschiffene Signalwiedergabe nur bei einwandfreier Abstimmung vorliegt, läßt sich C_k trimmen (verändern), solange bis ein Rechteckreferenzsignal unverschiffen wiedergegeben wird (Bild 133 links). Derartige Referenzsignale werden i.d.R. vom Oszilloskop zur Verfügung gestellt (Abgriff CAL, vgl. Bild 131).

Die Impedanz C_k/R_k wird in sog. Tastköpfen, die auch Meßklemmen enthalten, integriert.

XY-Betrieb

Sollen zwei gleichfrequente Sinussignale hinsichtlich ihrer Amplituden und Phasenlagen verglichen werden, dann kann ein Signal auf den x-Eingang, das andere auf den y-Eingang gelegt werden. Als resultierenden Kurvenverlauf ergibt sich ganz allgemein eine Ellipse. Sind beide Signale in Phase entartet die Ellipse in einen positiv geneigten Strich. Bei Gegenphasigkeit liegt der Strich negativ geneigt. Bei anderen Phasen öffnet sich die Ellipse. Aus Umlaufsinn, Scheitelwerten und Lage der Hauptachse lassen sich die Amplituden, bzw. deren Verhältnisse und die Phasenlagen mathematisch bestimmen (Lissajous-Ellipse [28]).

Bei nicht gleichfrequenten Signalen stellt sich kein ruhendes Schirmbild ein. Ausnahmen bilden sich bei ganzzahlige Frequenzvielfachen (allgemeine Lissajous-Figur [28]) bei denen sich andere Figuren einstellen [25].

Im xy-Betrieb können auch direkt U-I-Kennlinien von Bauelementen geschrieben werden. Dazu muß der Strom I vorher in ein gleichwertiges Spannungssignal umgeformt werden.

Z-Modulation

Mit dem Z-Eingang können zusätzlich Informationen auf dem Schirm angezeigt werden. Z.B. können bestimmte Kurvenzüge durch höhere Leuchtstärke markiert werden.

Zweite Zeitbasis

Manche echte Mehrkanal-Oszilloskope verfügen über eine sog. zweite Zeitbasis. Der zweite Kanal wird dabei mit einem rascheren Zeitmaßstab - also schnellerem Strahldurchlauf - aber mit gleichem Meßsignal gestartet. Der Startzeitpunkt erfolgt aber in einem definierten, einstellbaren Zeitpunkt bezüglich des Triggerpunktes. Die Kurve des zweiten Kanals entspricht einer Lupe, d.h. ein bestimmtes Kurvenstück des ersten Kanals wird über die gesamte Schirmbreite horizontal gedehnt. Eine vertikale Dehnung kann über die Vertikalverstärkung eingestellt werden.

Bei periodischen Signalen kann das Verfahren auch mit Multiplexoszilloskopen (Alternate/Chopper-Mode) benutzt werden. Zuerst wird das Signal normal dargestellt und im zweiten Durchgang ein späters Kurvenstück gedehnt.

Oft wird die aufgedehnte Stelle im nicht gedehnten Verlauf durch Z-Modulation markiert.

2.5 Literatur zur elektrischen Meßtechnik [23]..[47]

- [23] Profos, P.; Pfeifer, T.; (Hrsg.):
Handbuch der industriellen Meßtechnik
5. Auflage (1992), 1230S, Oldenbourg-Verlag, München, Wien

- [24] Kronmüller, H.:
Methoden der Meßtechnik - Eine Systemtheorie für Meßtechniker
(1979), Schnäcker-Verlag, Karlsruhe

- [25] Schrüfer, E.:
Elektrische Meßtechnik
Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen
(1983), Carl Hanser Verlag, München, Wien
- [26] Ostrovskij; L. A.:
Elektrische Meßtechnik
Grundlagen einer allgemeinen Theorie
2. Auflage (1974), VEB-Verlag Technik, Berlin (DDR)
- [27] Schrüfer, E.; (Hrsg.):
VDI-Lexikon Mess- und Automatisierungstechnik
(1992), VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf
- [28] Tränkler, H.-R.:
Taschenbuch der Meßtechnik mit Schwerpunkt Sensortechnik
(1989), R. Oldenbourg-Verlag, München, Wien
- [29] Hart, H.:
Einführung in die Meßtechnik
5. Auflage (1989), Verlag Technik, Berlin
- [30] Best, R.:
Digitale Meßwertverarbeitung
(1991), R. Oldenbourg-Verlag, München, Wien
- [31] Oppenheim, A.V.; Willsky, A.S.:
Signale und Systeme
1. Auflage in Deutsch (1989), VCH-Verlag, Weinheim
- [32] Cooper, W., D.; Helfrick, A., D.:
Elektrische Meßtechnik, Lehrbuch
VCH Verlagsgesellschaft Weinheim (1989)
- [33] Engelin-Müllges, G.; Reutter, F.:
Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit C-Programmen
2. Auflage (1990)
BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich
- [34] Zurmühl, R.:
Praktische Mathematik für Ingenieure
5. Auflage (1965)
Springer Verlag Berlin

- [35] Schmidt, W.; Feustel, O.:
Optoelektronik
Grundlagen und Auswahlkriterien für optoelektronische Bauelemente
Kamprath-Reihe
ISBN 3-8023-0076-9
Vogel Verlag Würzburg (1975)
- [36] Tietze, U.; Schenk, Ch.:
Halbleiterschaltungstechnik
Springer Verlag, Berlin (1993) 10.Auflage
- [37] Bystron, K.:
Grundlagen der technischen Elektronik
Carl Hanser Verlag, München (1990)
- [38] Stöckl, M.; Winterling K.H.:
Elektrische Meßtechnik
5.Auflage (1973), Verlag B.G.Teubner Stuttgart
- [39] Lunze, K.:
Einführung in die Elektrotechnik - Lehrbuch
13. Auflage (1991) Verlag Technik Berlin
- [40] Gerthsen, Kneser, Vogel:
Physik - Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen
12. Auflage (1974) Springer Verlag Berlin
- [41] Völz, H.:
Elektronik - Grundlagen, Prinzipien, Zusammenhänge
2. Auflage (1979) Akademie Verlag Berlin
- [42] Paul, M.:
Digitale Meßwertverarbeitung - Methoden und Fallstudien
2. Auflage (1987) VDE-Verlag, Offenbach
- [43] Paul, R.:
Elektrotechnik (Band I und II)
2. Auflage (1990) Springer Verlag Berlin

- [44] Herpy, M.:
Analoge integrierte Schaltungen - Ein Lehrbuch, Schaltungen mit
Operationsverstärkern und analogen Multiplizierern zu entwerfen
2. Auflage (1979) Franzis-Verlag, München

- [45] Leonhardt, E.:
Grundlagen der Digitaltechnik - eine systematische Einführung
(1976) Carl Hanser Verlag, München

- [46] Stoll, D.:
Einführung in die Nachrichtentechnik
Elektrizitäts-Gesellschaft AEG-Telefunken
Berlin und Frankfurt am Main (1978)

- [47] Giloi, W.; Liebig, H.:
Logischer Entwurf digitaler Systeme
(1973) Springer Verlag, Berlin

Stichwortverzeichnis

1

1-aus-10-Code, 156

3

3dB-Wert, 20

4

4..20mA-Schnittstelle, 14

8

8421-Code, 156

A

Abgleichbedingung
bei Wechselstrombrücken,
112
einer Brücke, 107

Abgriff
elektrischer Signale, 96

Ablaufsteuerung, 66

Ablenkelektroden, 175

Ablenkplatten, 175

Abszisse, 35

Abtastfrequenz, 165

Abtastglieder, 165

Abtast-Halteglied, 165

Abtasttheorem
nach Shannon, 163

Abtastung, 161

Abtastwert, 84, 85, 162

ADC, 162

ADU, 162

AD-Wandler, 161, 180
bei Schreibern, 118

Leistungsmessung, 100

AD-Wandler nach dem
Wägeverfahren, 172

AKF, 53

Eigenschaften, 53

Alternate-Betrieb, 178

Ampere
absolute, 70

Ampère, 70

Amplitude, 19, 20, 83

Amplitudendichtefunktion, 50

Amplitudeneinstellung, 148

Amplitudenstabilisierung, 148

Amplitudenverhältnis, 141

Amplitudenverteilungsfunktion,
50

analog, 9

Analoge/digitale Wandlung,
161

Analoges Oszilloskop, 176

Änderung

Kennwerte, 64

Änderungsbreite, 28

Anpassung der Einheiten, 5

Anstiegsrate
des Operationsverstärkers,
126

Anzeigewert, 66

aperiodischer Grenzfall, 18

Approximation, 37

Arbeitspunkt, 12, 63

Asynchrone Zähler, 159

Aufnehmer, 8

Ausgabegerät, 8

Ausgangsimpedanz
des Operationsverstärkers,
125
von Operationsverstärkern,
121

Ausgangspegel, 146

Ausgangssignal, 11

Ausgangswiderstand
des Operationsverstärkers,
125

Ausgeber, 8

Ausgleichsfunktion, 42

Ausgleichsgerade, 45

Ausgleichsrechnung, 14, 37, 46

Ausgleichsvorgang, 11

Ausgleichszeit, 18

Ausschlagsverfahren
bei einer Meßbrücke, 108

Ausschlagverfahren, 61

Aussteuergrenze
bei Operationsverstärkern,
121

Autokorrelation, 52

Autokorrelationsfunktion, 53

B

Bandbreite, 130
des Operationsverstärkers,
125

Basismodule
eines Zählers, 158

BCD-Code, 156

Begrenzung
bei Operationsverstärkern,
121

Beobachtungsschirm, 174

Betrag, 20

Bezugsgröße, 4

Bezugswert, 161

Bildschirmspeicher, 79

Binärcode, 156

Binärzahl, 156

Bit, 156

Blindleistung, 95

Blindwiderstand
induktiver, 73
kapazitiver, 73

Blockkondensator, 128

Blockschaltbild, 12

Bodediagramm, 20
von Operationsverstärkern,
122

Braun'schen Röhre, 174

Brückendiagonale mit
Belastung, 109

Brückendiagonalspannung,
107, 136, 150

Brückenoszillator, 144

C

carry. *Siehe* , siehe Übertrag

CGS-System, 4

Chopper-Betrieb, 178

Codierung. *Siehe* , siehe
Kodierung

Converter, 161

Coulomb, 71

CRT, 79

Cursor, 182

D

D/A-Wandlung, 161

DAC, 162

Dämpfungswert, 18

Darstellung von Meßwerten, 34

Datalogger, 170

DAU, 162

DA-Wandler, 168

DA-Wandler mit
I-U-Verstärkung, 168

dB-Wert, 20

Demodulator, 148

Demultiplex, 166

deterministisches Signal, 50

Deutschen Institut für Normung,
3

Dezibel, 20

D-Flip-Flop, 157

Differentialgleichungen, 16

Differentialtransformator, 140

Differenzbildung, 58

Differenzenquotient, 66

Differenzverstärker
bei Strommessung, 82

digital, 9

Digital-Analog-Wandler, 168

Digitales Oszilloskop, 180

Digitalspeicheroszilloskop, 170

Dirac-Stoß, 19

Dreheiseninstrument, 88

Dreheiseninstrumente, 76

Dreheisenmeßwerk, 76, 88

Drehspule, 97

Drehspulinstrument, 61, 75, 97,
107

Drehspulmeßwerk, 75

Dreiecksignalgenerator, 146

- Dreileiterschaltung
bei einer Meßbrücke, 110
- Drucker, 8
- DSO, 180
- Dual-Slope-Verfahren, 170
- Dualzahl, 156
- Dunkelsteuerung, 177
- Dynamik
Verbesserung, 60
- dynamisches Systemmodell, 16
-
- E**
- EEG. *Siehe* siehe
- Elektroenzephalograph
- Effektivwertmessung
Dreheisenmeßwerk, 88
- Effektivwert, 76, 84, 104, 149
- Effektivwertmessung
auswerten der
Definitionsgleichung, 86
digitale Signalverarbeitung, 87
Gleichrichtung, 90
Hitzdrahtinstrument, 89
- Eichbehörde, 6
- Eichung, 6
- Eigenschaften
dynamische, 60
- Ein-/Ausgangssystem, 12
- Einflußgröße, 64
- Einflußgrößen
unabhängige, 23
- Eingangsgroße, 11
- Eingangsimpedanz
des Operationsverstärkers, 124
von Operationsverstärkern, 121
- Eingangs-Offsetspannung
des Operationsverstärkers, 123
Korrektur bei OpV, 128
- Eingangs-Offsetstrom
des Operationsverstärkers, 123
- Eingangsruhestrom
des Operationsverstärkers, 123
- Eingangsruhestrome, 134
- Eingangsspannungsdrift
des Operationsverstärkers, 123
- Eingangswiderstand
des Operationsverstärkers, 124
- Einheit, 161
- Einheit, einheitlich, 2
- Einheiten, SI, 4
- Einheitensystem, 4
- Einsverstärkungsfrequenz
des Operationsverstärkers, 125
- Einweggleichrichtung, 90, 149
- Einzelmeßwerte, 29
- Elektrizitätsmenge, 70
- Elektrizitätszähler, 101
- Elektroenergieverbrauchsähler, 101
- Elektroenzephalograph, 118
- Elektrometerschaltung, 129
- Elektronenstrahlröhre, 174
- Element
elektrochemisches, 69
galvanisches, 69
- Empfindlichkeit, 12, 13, 20
einer Meßbrücke, 108
- Empfindlichkeit, konstante, 14
- Empfindlichkeitsänderung, 64
- Empfindlichkeitsbegriff, 12
- Energie
elektrische, 92
- Energiepuffer
bei OpV-Versorgung, 128
- Energieverbrauchsähler, 101
- Energieverteilung, 101
- Ensemblewert, 51
- Ereigniszähler, 160
- Ereigniszählung, 155
- Ergodizität, 51
- Ersatzgerade, 13, 15
erwartungstreu, 23
- Erwartungswert, 22, 26, 51
- Exponentialfunktion, 39
-
- F**
- Faktoren, 5
- Farad, 73
- Faraday, 73
- Fast Fourier Transformierte, 163
- Federsystem, 61
- Fehler, 10
grobe, 10
mittlerer, 24, 30
Parallaxe-, 77
systematische, 10, 30
zufällige, 10, 30
- Fehler, relativer, 13
- Fehlerfortpflanzung
Fehlergrenzen, 32
- Fehlerfortpflanzung der
systematischen Fehler, 24
- Fehlerfortpflanzungsgesetz
nach Gauß, 28
- Fehlerkorrektur, 30
- Fehlerkurve, 13
- Fehlerquadrate, 38
- Fehlerquadratsumme
Minimum, 38
- Fensterfunktion, 163
- Ferraris-Antrieb, 103
- Ferraris-Motor, 103
- Ferrariszähler, 101
- Festlegung, internationale, 4
- Flashconverter, 169
- Flip-Flop, 157
- Fluß
magnetischer, 71
- Fokkusierung, 178
- Formfaktor, 91, 149
- Formnetzwerk, 148
- Fortplanzung der zufälligen
Fehler, 25
- Frequenzeinstellung, 148
- Frequenzgang, 20
- Frequenzkompensation
eines OpVs, 129
- Frequenzmessung, 155, 160
- Frequenzspektrum, 163
- Fühler, 8
- Funktionalmatrix, 44
- Funktionsblock, 57
- Funktionsgenerator, 140, 145
für Laborbetrieb, 148
Schaltung, 146
-
- G**
- Galvanometer, 107, 117
- Garantiefehlergrenze, 10, 32
- GAUSS, 38, 41
- Gauß'sche
Fehlerfortpflanzungsgesetz, 28
- Gauß'sche Glockenkurve, 22
- Gegenkopplung, 60
- Gegenwirkung, 61
- Genauigkeit, 3
- Gerade, 12
- Geradenparameter, 13
- Geradenstücke, 35
- Gerätekonstante, 97
- Gesamtauswirkung, 28
- geschlossener mathematischer
Ausdruck, 12
- Geschwindigkeitsfehler, 19
- Gewichtsmatrix, 44
- Gleichphasigkeit, 141
- Gleichrichter, 148
- Gleichrichterbrückenschaltung, 91
- Gleichrichterschaltung
aktiv, 92
- Gleichrichtermittelwert, 149
- Gleichrichtung, 90
phasenselektive, 150
- Gleichspannungsmeßbrücke, 106
- Gleichstromnetz, 92
- Gleichstromwiderstand, 72

Gleichtakt-Spannungsunterdrückung
 des Operationsverstärkers, 124
 Gleichtakt-Spannungsverstärkung
 des Operationsverstärkers, 124
 Gleichungssystem
 linear, exakt lösbar, 40
 nichtlinear, 43
 überbestimmt, 40
 unterbestimmt, 40
 Glimmer, 73
 Glockenkurve, 22
 Grad, 20
 Graetzschaltung, 90
 Grenzfrequenz, 20
 des Operationsverstärkers, 125
 Grundbegriffe, 7
 Grundbeschaltung
 eines
 Operationsverstärkers, 127
 Guarding, 106

H

Hall-Effekt, 98
 Hall-Element, 98
 Hall-Konstante, 99
 Hallsonde, 72
 Hall-Spannung, 98
 Hammingfenster, 164
 hardcopy, 182
 Häufigkeit
 relative, 34
 Häufigkeitsdichte, 23
 Häufigkeitsverteilung, 22
 relative, 23
 Henry, 73
 Hexadezimalsystem, 156
 Hex-Code, 156
 Hitzdrahtinstrument, 89
 Horizontalspannung, 176
 Hysterese, 167
 Hystereseeffekt, 14

I

Impulsantwort, 16, 19, 57
 Induktanz, 73
 Induktionsgesetz, 71
 Induktionszähler, 101
 Induktivitäten
 parasitäre, 83
 Induktivitätsmeßbrücke, 114
 Informationsfluß, 9
 Innenwiderstand einer
 Spannungsquelle, 79
 Instabilität, 60

Instrumentenverstärker, 137
 Integrierer, 137
 Effektivwertmessung, 86
 nicht-invertierend, 138
 Interpolation, 35, 162, 165
 ISO, 3
 Iteration, 44

J

Jacobimatrix, 44
 Josephson-Effekt, 69

K

Kalibrierung, 6, 64
 Kapazität, 73
 Kapazitätsmeßbrücke, 113
 Kapazitätsnormal, 73
 Kenngrößen
 von Operationsverstärkern, 122
 Kennlinie, 11, 12, 57
 kalibriert, 66
 nichtlinear, 63
 statische, 61
 Kennlinie im Arbeitspunkt, 13
 Kennlinie, linearisiert, 15
 Kennlinie, nichtlinear, 12, 15
 Kettenstruktur, 57, 58, 61
 Effektivwertmessung, 86
 KKF, 56. *Siehe* , s.
 Kreuzkorrelationsfunktion
 Klappenanzeigen, 79
 Klassengenauigkeit, 10, 32
 Klirrfaktor, 143
 Klitzing-Effekt. *Siehe*
 Von-Klitzing-Effekt
 Kodierung, 155
 Komparator, 146, 166
 nicht-invertierend, 147
 Komparatorschaltung, 166
 Kompensation
 vollständige, 63
 Kompensationsaufwand, 62
 Kompensationsglied,
 elektrodynamisches, 14
 Kompensationskraft, 62
 Kompensationsschreiber, 118,
 119
 Kompensationssystem, 17
 Kompensationsverfahren, 60,
 63, 117
 bei einer Brücke, 108
 Kompensationswaage
 Beispiel, 62
 Kompensator, 117
 kompensierende Verfahren, 13
 Kondensator, 73
 Konstanten, 7
 Konstanz, 11
 Kontaktwiderstand, 106

Korrekturfaktor. *Siehe* , siehe
 Formfaktor
 bei Effektivwertmessung
 Korrekturglied, 12
 Korrekturkennlinie, 13
 Korrelation
 lineare, 46
 Korrelationsanalyse, 45
 Korrelationskoeffizient, 52
 linearer, 48
 Kovarianz, 49
 Kraft
 elektrodynamische, 70
 Kraftaufnehmer, 14
 Kraftgesetz
 elektrodynamisches, 70
 Kraftmessung, 70
 Kreisfrequenz, 19, 83
 Kreisstruktur, 57, 60, 62, 117
 Kreuzkorrelation, 55
 Kreuzkorrelationsfunktion, 56
 Kriterien
 Klassifizierung von
 Meßgeräten, 57

L

Ladung, 98
 elektrische, 70
 Laplace-Transformierte, 57
 Laufzeitmessung, 56
 LCD, 78
 LC-Oszillator nach Colpitts, 145
 LED, 78
 Leerlaufspannung einer
 Spannungsquelle, 79
 Leerlauf-Spannungsverstärkung
 des Operationsverstärkers,
 124
 Leistung
 elektrische, 92
 momentane, 92
 Leistungsbilanz, 92
 Leistungsmessung, 92, 101
 digitale Signalverarbeitung,
 100
 elektronische, 100
 Hall-Multiplikator-Meßwerk,
 98
 Leitungswiderstand, 106, 110
 Leitwert
 elektrischer, 72
 Leuchtspur, 175
 Lichtspur, 174
 Lineare Korrelation, 46
 lineare Systeme, 16
 Linearisierung, 12, 61, 62
 Linearitätsfehler, 13
 Lissajous-Ellipse, 183
 Lissajous-Figur, 183

- LSB, 156
Luftkondensator, 73
Lupe
 elektronische, 183
-
- M**
- Magnetisierung, 14
Masse
 fiktive, 132
Maßverkörperung, 9
Maximale Ausgangsspannung
 des Operationsverstärkers,
 125
Maximaler Ausgangsstrom
 des Operationsverstärkers,
 125
Meßabgriff
 direkter, 96
 halbindirekter, 96
 indirekter, 96
Meßbereich, 9
Meßbrücke, 59, 73, 74, 117
Meßdatenverarbeitung, 161
Meßeinrichtung, 2, 8
Messen, 3
Meßfehler, 9, 10
 Gliederung, 11
 statistische, 46
 systematisch, 66
 systematischer, 21
 zufälliger, 22
Meßfehler, dynamisch, 15
Meßgerät, 7
 anzeigend, 118
 registrierend, 118
Meßgerät, anzeigendes, 8
Meßgerät, zählendes, 8
Meßgeräte
 elektrische, 116
Meßgeräte mit direkter
Ausgabe, 8
Meßgeräte mit Skalenanzeige,
9
Meßgeräte mit Ziffernanzeige,
9
Meßgeschwindigkeit, 16
Meßgröße, 2, 3, 8
Meßkette, 8
Meßobjekt, 9
Meßprinzipien, 57
Meßprotokoll, 34
 formalisiertes, 34
Meßpunkt, 81
Meßpunkte, 35
Meßreihe, 37
Meßreihen, 35
 graphisch, 35
 tabellarisch, 35
Meßschreiber, 118
Meßsignal, 8
- Meßsystem, 8
Meßtransformator, 96, 97
Meßübertrager, 96, 97
Meßumformer, 9
Meßumsetzer, 9
Meßunsicherheit, 3, 9
Meßverstärker, 9, 120
Meßwerk, 74
 Drehspul-, 97
 elektrodynamisches, 97,
 102
Meßwert, 8
 Angabe, 34
 -punkte, 35
 Unsicherheit, 30
 Vertrauensbereich, 34
Meßwertangabe, 34
Meßwerten
 Darstellung, 34
Meßwertepaare, 37
Meßzeit, 64
Methode der kleinsten
Fehlerquadrate, 13, 37, 38
Mikrorechner, 66
Mitskopplung, 60, 167
mittlerer (quadratischer)
Fehler, 24
Mittelwert, 23, 26, 30, 138
 bei Leistungsmessung, 92
 einer Leistung, 95
 statistischer, 52
 Streuung, 29
 Vertrauensbereich, 29
 Wirkleistung, 92
 zeitlicher, 84
Mittelwertbilder, 137
mittlere (quadratische)
Abweichung, 24
mittlerer Fehler, 30
MKSA-System, 4
Mikrorechner, 161
Moment
 statistisches, 52
Momentanleistung, 92, 100,
101
MS/s, 170
MSB, 156
Multiplexbetrieb, 101, 166, 179
Multiplizierer, 100
Multivibrator, 147
-
- N**
- Nachlaufsynchronisation, 148
Nebenwiderstand, 97
 Strommessung, 82
Normal
 elektrische Ladung, 71
 Flußdichte, 72
 Induktivität, 74
 Kapazität, 73
- Leistung, elektrische, 71
magnetischer Fluß, 72
Spannung, elektrische, 69
Widerstand, 72
- Normale, 6
Normalelement, 69
Normalverteilung, 22
Normalwiderstand, 72
normieren, 161
Normierung, 100
Normung, 3
Nullinstrument, 107, 113, 117
Nullpunktsänderung, 64
Nullpunkt, 63
Nullpunkt Korrektur, 64
Nyquistkriterium, 142
-
- O**
- Oberflächenanalysen, 57
Offsetkompensation, 128
Offsetspannung, 134
Ohm, 72
Ohmmeter, 104, 106
Oktalsystem, 156
OpA. *Siehe* , siehe Operational
Amplifier
Operational Amplifier, 120
Operationsverstärker, 120
optimales dynamisches
Verhalten, 18
OpV. *Siehe* , siehe
Operationsverstärker
Ordinate, 35
Oszillator, 140
Oszillograph, 174
Oszillographenröhre, 174
Oszilloskop, 86
Oszilloskope, 174
-
- P**
- Parabel, 39
Parabelbogensatz
 für Sinussignale, 140
Parabelbogengenerator, 147
Parallaxefehler, 77
Parallelstruktur, 57, 58
Parallelumsetzer, 169
Parallelwiderstand
 Strommessung, 82
Parameter, 37, 65
 Variation, 38
Parametervektor, 40
Periodenlänge, 18
Periodenlängenmessung, 155,
160
Periodizität
 der AKF, 54
Permanentmagnet, 97
Phase, 20
Phase Locked Loop, 148

Phasenlage, 19
 Phasenrelation
 bei Widerstandsmessung, 104
 Phasenselektive Gleichrichtung, 150
 Phasenverschiebung, 150
 Physikalische Technische Bundesanstalt. *Siehe*, siehe PTB
 Pixel, 79
 Pixelmatrix, 182
 Plasmaanzeigen, 78
 PLL, 148
 Polynome, 39
 2. Grades, 39
 Potentialdifferenz, 69
 Präzisionsgleichrichter, 92, 148, 149
 Preset-Eingang, 158
 Prinzip
 von Meßgeräten, 57
 Probe. *Siehe*, siehe Abtastwert
 Proportionalität, 14
 Prozeß
 ergodisch, 51
 Prozeßdatenverarbeitung, 170
 PSG. *Siehe*, siehe
 Phasenselektiver Gleichrichter PTB, 6
 Punkteschar, 37
 Punktmatrix, 157

Q

Qualität des Meßwertes, 3
 Quanten-Hall-Effekt, 73
 quantisieren, 163
 Quantisierung, 161
 Quantisierungsfehler, 163
 Quantisierungsrauschen, 163
 Querspannung. *Siehe* siehe Hallspannung

R

rad, 20
 Rampenantwort, 16, 19
 Randbedingungen, 34
 Rauschsignal, 54
 RC-Oszillator mit Tiefpaßnetzwerk, 143
 RC-Oszillator nach Wien, 143
 Referenzgröße, 58, 65, 101
 Referenzgrößen, 6
 Referenzwert, 59
 Regelkreis, 13
 regellose Signalverläufe, 51
 Regelungstechnik, 16, 57, 60
 Register, 157
 Registrierphasen, 177
 Regler, 63

Reglereinstellung, 62
 Regression
 lineare, 45
 Reibung, 14
 Reihenstruktur, 58
 Remanenz, 14
 Renormierung, 168
 Reset-Eingang, 158
 Restmagnetismus, 14
 ROM, 148, 157
 Rückführung, 60
 Rückkopplungsnetzwerk, 141
 Rückwirkung, 10, 60

S

S&H. *Siehe*, siehe Sample and Hold
 sample, 162
 Sample and Hold, 165
 Schaltbild, 58
 Schaltnetz, 157
 Schaltsymbol, 78
 Schaltwerk, 156
 Schätzwert der Standardabweichung, 31
 Schätzwert für den wahren Wert, 23
 Scheinleistung, 95, 96
 Schere
 bei Ausgleichsgeraden, 47
 Schleifdrahtmeßbrücke, 108
 Schleife, 60
 Schleifenverstärkung, 142
 Schreiber, 8, 118
 Schreiber mit Servoantrieb, 119
 Schritte
 eines Meßvorgangs, 64
 schrittweise Annäherung, 174
 Schwingneigung, 17, 60
 Schwingquarz, 144
 Schwingungsanzeiger, 174
 Schwingungserzeugung, 140
 Schwingungshäufigkeit, 83
 Schwingungsschreiber, 174
 Sedezimalsystem, 156
 Selbstkalibrierende Verfahren, 64
 Selbstkalibrierung, 64
 Sense, 106
 Sensor, 8
 Shannon'sches Abtasttheorem, 163
 Shunt, 72, 82
 Strommessung, 82
 SI, 4
 SI-Basisgrößen, 4
 Sichtausgeber, 8
 Siemens, 72
 Signalausgang, 57

Signalbeobachtung
 Wechselstrom, 86
 Signaleingang, 57
 Signalfluß, 57
 Signalform
 von Generatoren, 140
 Signalpfad, 57
 SI-Größen, abgeleitete Einheiten, 5
 Silizium-Z-Dioden, 69
 Simultanumsetzer, 169
 Sinusantwort, 16, 19
 Sinusoszillator, 140
 Schaltungen, 143
 SI-Vorsatz, 5
 Skala
 inverse, 104
 Spannung
 elektrische, 69, 89
 Spannungsgegenkopplung, 129
 Spannungskompensator, 117
 Spannungsmessung
 Gleichstromnetz, 79
 Meßleitungen, 80
 Spannungsnormale, 69
 Spannungsrichtige Messung von Widerständen, 105
 Spannungsteiler, 107
 bei
 Spannungsgegenkopplung, 130
 Spannungsvergleich, 166
 Spannungswandler, 96
 Speichernetzwerk, 157
 Speicheroszilloskop
 analog, 180
 digital, 180
 Speichervermögen
 induktives, 73
 kapazitives, 73
 Speisung, 140
 Spektrallinie, 164
 Spiegelgalvanometer, 108
 Spitzenwert, 83
 Spitze-Spitze-Wert, 83
 Splinefunktion, 39
 approximierende, 37
 Spline-Funktion, 36
 Sprungantwort, 16, 57
 Spule, 73
 Standardabweichung, 22, 24, 27
 Schätzwert, 28
 Startpegel, 176
 stationärer Endwert, 15
 statistischen Werte, 34
 Steigung, 12, 13
 Stellsignal, 63
 Steuerung
 Effektivwertmessung, 87

- Steuerwerks
 Effektivwertmessung, 87
 Stichprobe, 29
 stochastische Prozesse, 51
 Störeinflüsse, 59
 Streuung, 22
 Strom
 elektrisch, 70
 Stromgegenkopplung, 132
 Strommessung, 81
 bei pulsförmigen Strömen, 83
 Stromrichtige Messung
 von Widerständen, 105
 Stromversorgung
 von Operationsverstärkern, 127
 Stromversorgungsnetz, 101
 Stromwaage, 70
 Stromwandler, 96
 Stromzähler, 101
 Stromzange, 96
 Struktur
 von Meßgeräten, 57
 Strukturbild, 57
 Stufenraster, 163
 Stufung
 1/2/5- bei Strommessung, 81, 82
 Stützstelle, 36
 Subtrahierer, 134
 Subtrahierverstärker
 symmetrischer, 137
 sukzessive Approximation, 172
 Summationsstelle, 57
 Summierer, 132
 Summiererschaltung, 168
 Supraleitung, 69
 Symmetrieeinstellung, 148
 Synchrone Zähler, 160
 System. trägheitsbehaftet, 18
 Systematische Meßfehler, 21
 Systemtheorie, 57
-
- T**
 Takterzeugung, 140
 Tangente, 12
 Tastkopf, 182
 Taylorreihenentwicklung, 13
 Teilstruktur, 60
 Temperatureinflüsse, 59
 Tesla, 72
 Thermoelement, 89
 Thermoinstrument
 für Wechselstrommessung, 89
 Thomsonbrücke, 110
 Tiefpaß, 100, 139
 Tiefpaßverhalten, 20
 Toleranz, 35
 Toleranzband, 18
 Toleranzbreite, 18
 Torschaltung, 160
 Totzeit, 17
 Trägerfrequenzverfahren, 154
 Trägheit, 98, 138
 Transitionsbeziehung, 156
 Trigger, 87
 Triggerbedingungen, 177
 Triggerpegel, 176
 Triggerschaltung, 176
 Tunneleffekt, 69
-
- U**
 Überschwingen, 18
 Übersprechen, 166
 Übertrag, 158
 Übertragungsfaktor, 57
 Übertragungsfunktion, 57
 Übertragungsglied, 8, 57
 Übertragungsstrecke, 8
 Übertragungssysteme
 Analyse, 56
 Übertragungsverhalten
 von Operationsverstärkern, 122
 Umformer, 161
 Umkehrverstärkerschaltung, 132
 Universalverstärker, 120
 Unsicherheit, 30, 33
 mögliche, 32
 wahrscheinliche, 33
-
- V**
 Varianz, 22
 VCO, 148
 VDE, 3
 Verfahren
 Selbstkalibrierung, 64
 Verformungen, 14
 Vergleichen, 2
 Vergleichsmessung, 23
 Verhalten
 dynamisch, 57
 Verhalten, statisches, 11
 Verhältnis der Amplituden, 20
 Verlustfaktor
 Kondensator, 73
 Verschiebung, 13
 Versorgungsspannung
 von Operationsverstärkern, 121
 Verstärker, 120
 rückgekoppelt, 141
 Verstärkungsbandbreitenprodukt
 t
 beim Operationsverstärker, 126
 Verstärkungsbandbreiteprodukt, 130
 Verteilungsfunktion, 50
 Vertikalspannung, 176
 Verwandtschaft
 statistische, 46
 Verzugszeit, 18
 Vertrauensbereich, 36
 Videosignal, 182
 Vierdrahtmessung, 106, 110
 Vierleitertechnik, 110
 Visualisierungsverfahren, 181
 Vollweggleichrichterschaltung, 149
 Vollweggleichrichtung, 90, 149
 Volt, 69
 Volta, 69
 Voltage Controlled Oscillator, 148
 Voltmeter, 172
 Von-Klitzing-Effekt, 73
 Vorsatz, 5
 Vorzeichen, Fehler, 11
 VZ-1-Glied, 139
-
- W**
 Wägetechnik, 70
 Wägeverfahren, 172
 Wandler, 161
 Watt, 71, 92
 Weber, 72
 Wechselspannung, 83
 Wechselspannungsmeßbrücke, 112
 Wechselstrom, 83
 Wechselstrombrücke, 73
 nach Maxwell, 114
 nach Maxwell-Wien, 115
 Wechselstrommeßbrücke, 150
 nach Wien, 113
 Wechselstromnetz, 92
 Wechselstromwiderstand, 92, 104
 Wertebereich, 5
 Wertetabelle, 12
 Weston-Normalelement, 69
 Wheatstonebrücke, 106, 117
 Widerstand
 ohmsch, 72
 Widerstandsmessung, 103, 106
 Strom-/Spannungsmessung, 104
 Wiederholungsmessung, 35
 Wirkleistung, 95, 101
 Wirkungsablauf, 58
-
- X**
 x-t-Schreiber, 119
 XY-Betrieb, 183
 x-y-Schreiber, 119

Z

- Zahlensystem, 155
- Zahlenwert, 3
- Zähler, 77, 155
- Zählerkonstante, 103
- Zählimpulsfolge, 155
- Zählwerk, 101
- Z-Dioden
 - Silizium-, als
 - Spannungsnormale, 69
- Zeigerinstrument, 74, 78
 - Dreheisen-, 88
- Zeit
 - Definition von Volt, 70
- Zeitbasis, 177
- Zeitkonstante, 18, 57
- Zeitmaßstab, 177
- Zeitmittelwert, 51
- Zeitrampe, 177
- Z-Modulation, 180, 183
- Zufällige Meßfehler, 22
- Zusammenhang
 - innerer, eines Signals, 52
 - mathematischer, 37, 38
 - physikalischer, 38
- Zusammenhang zwischen
 - Größen, 12
- Zusatzinformation, 34
- Zustandscode, 157
- Zustandsspeicher, 156
- Zweipol
 - elektrischer, 92
- Zweistrahloszilloskop, 180
- Zweite Zeitbasis, 183
- Zweiweggleichrichtung, 90